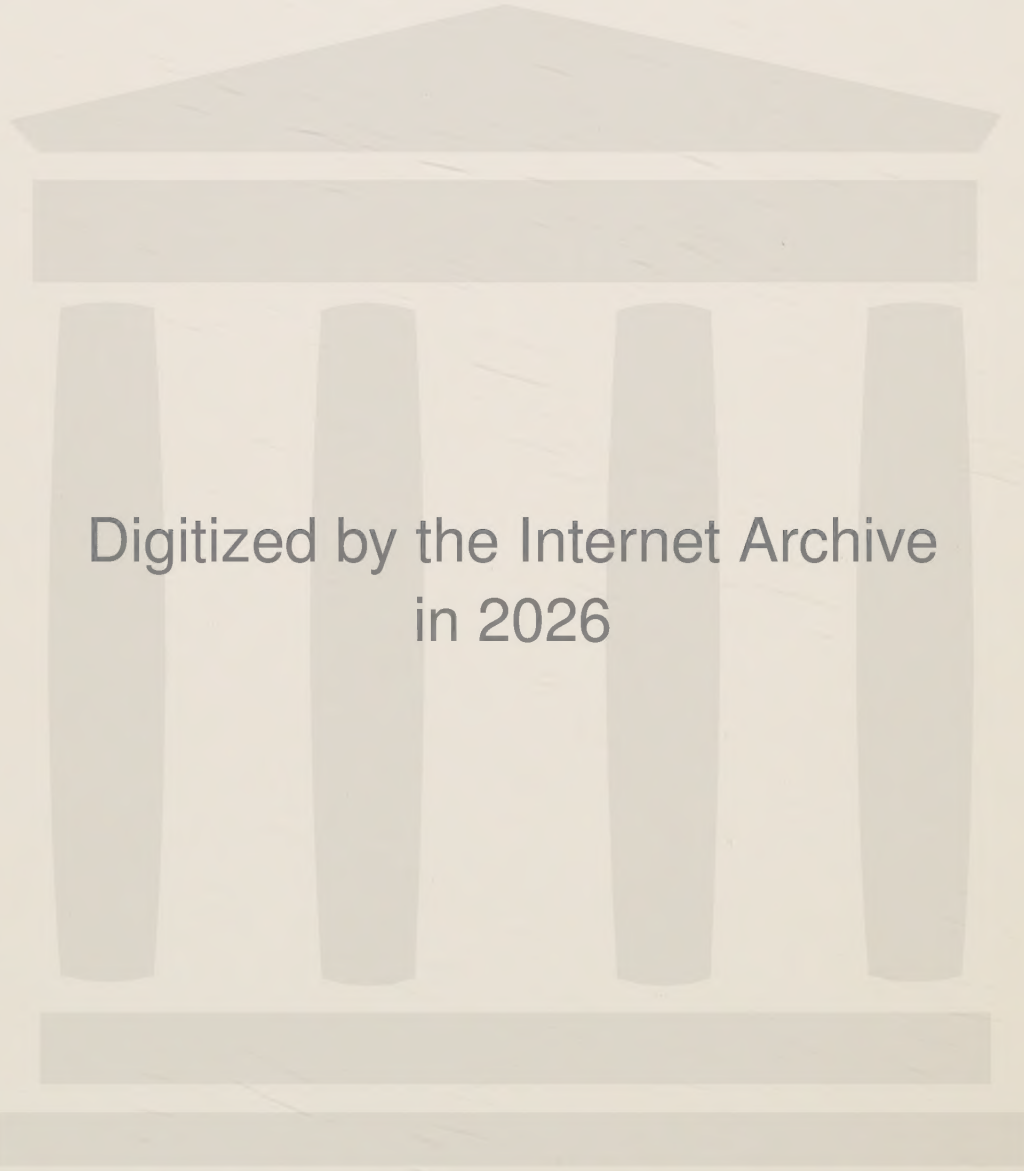


Frankfurt ^am 1969

P. A. Spies

1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550827_0124

ANREGUNG DES EINTEILCHENKONTINUUMS VON ATOMKERNEN
DURCH INELASTISCHE ELEKTRONENSTREUUNG —
ELEKTRODISINTEGRATION

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Peter Antony-Spies
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, April 1969

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. H. Berckhemer
Leiter der Arbeit: Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter: Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter: Priv.Doiz.Dr. H.G. Wahsweiler

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juni 1969

Inhaltsübersicht

	Seite
Abstract	1
Einleitung	2
I. Formulierung der Elektrodintegration in Störungsrechnung erster Ordnung	
A. Zur Kinematik	5
B. Wirkungsquerschnitte in Born'scher Näherung	6
II. Multipolentwicklung des Viererpotentials des Elektrons	
A. Übergangstromdichte und Viererpotential	11
B. Entwicklung nach Multipolen	13
III. Multipolentwicklung der elektromagnetischen Wechselwirkungsenergie	15
IV. Beschreibung des Einteilchenkontinuums eines Kerns im Rahmen der Eigenkanaltheorie	18
V. Anregungsquerschnitt in das Einteilchenkontinuum	
A. Übergangsmatrixelemente	24
B. Anregungsquerschnitt	31
VI. Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen	35
VII. Numerische Rechnungen und Ergebnisse	
A. Parameter des Kernmodells	51
B. Diskussion der berechneten Anregungsquerschnitte	56
Zusammenfassung	67
Anhang	69
Literatur	73

Abstract

Excitations of one-nucleon-continua of nuclei by electron scattering are investigated. The nuclear problem is treated in the framework of the eigenchannel theory of nuclear reactions using 1p-1h-states. The treatment of electron scattering is restricted to first order Born approximation. On this basis formulas are derived for excitation cross sections as well as for electron-nucleon angular correlations. Numerical results are presented for excitations of 1^- , 2^- and 3^- -states of C^{12} in the energy range from the proton emission threshold up to 30 MeV.

Einleitung

Die Elektronenstreuung hat in der modernen Kernphysik als eine der ergiebigsten Methoden zur Analyse von Kernstrukturen und zur Prüfung von Kernmodellen große Bedeutung erlangt. Die Gründe dafür ergeben sich letztlich daraus, daß die wesentliche Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern elektromagnetischer Natur und als solche experimentell wie theoretisch bestens bekannt ist. Da die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung um eine Größenordnung $\alpha=1/137$ kleiner ist als die der Nukleonen im Kern, stören Streuexperimente mit Elektronen die zu erforschende Kernstruktur nur wenig. Gegenüber Photonen, die ebenfalls diese nützliche Eigenschaft besitzen, bieten Elektronen noch den folgenden entscheidenden Vorteil: Sie können nicht nur wie jene einen festen Impulsbetrag q sondern in den Grenzen der Erhaltungssätze beliebige Impulse an den Kern abgeben. Dadurch ist es möglich, über die q -Abhängigkeit der Streuquerschnitte wichtige modellunabhängige Größen, wie etwa Kernradien, Ladungs- und Impulsverteilungen zu berechnen. So hat die Gruppe um R. Hofstadter¹⁾ seit Anfang der fünfziger Jahre Radien und Ladungsverteilungen zahlreicher Kerne im Grundzustand durch elastische Elektronenstreuung bestimmt. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Impulsverteilung der Protonen im Kern werden seit 1961 auf der Grundlage quasi-elastischer Elektronenstreuung angestellt.²⁻⁴⁾ Mit den Methoden der inelastischen Elektronenstreuung schließlich erhält man darüber hinaus noch reichhaltige Informationen über die Anregungsstruktur der Kerne, was für die Prüfung von Kernmodellen von großem Nutzen ist. Hierzu gibt es eine Fülle bedeutender Arbeiten, von denen, stellvertretend für alle, nur die Reviewartikel von W.C. Barber⁵⁾ und von T. de Forest und J.D. Walecka⁶⁾ erwähnt seien. Es ist bezeichnend, daß bei den meisten dieser Arbeiten die verwendeten Kernmodelle nur gebundene Anregungszustände des Kerns erlauben. Soweit Anregungsenergien die Schwelle der Einteilchenemission überschreiten, werden Kontinuumseffekte entweder nachher phänomenologisch berücksichtigt oder ganz vernachlässigt. Jedoch hat man bei wachsendem Interesse am Kernkontinuum in den letzten Jahren

nach und nach damit begonnen, auch dieses von Anfang an in die Betrachtungen mit einzuschließen.^{7,8)} Abgesehen von Effekten, die bereits bei Anregungsquerschnitten auftreten^{7,9)}, öffnet eine ernsthafte Berücksichtigung des Kontinuums das weite Feld der Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen, d.h. der Beschreibung von Koinzidenzmessungen gestreuter Elektronen und emittierter Nukleonen.¹⁰⁻¹²⁾ Entsprechende Experimente - einige Beschleuniger mit den dazu erforderlichen Eigenschaften befinden sich zur Zeit im Bau oder kurz vor ihrer Vollendung⁺ - werden möglicherweise Streuquerschnitte bisher nicht gekannter Präzision liefern. Denn bei Winkelkorrelationen kann man alle Elektronen ausscheiden, die sonst die Wirkungsquerschnitte verfälschen, weil sie durch Bremsstrahlung eine falsche Energie besitzen. Ebenso sollte es möglich sein, quasielastische und inelastische (Resonanz-) Streuung voneinander zu trennen.¹³⁾ Ferner wird man noch zusätzliche Daten über Spins und Paritäten der angeregten Kontinuumszustände sowie über relative Phasen ihrer Übergangsmatrixelemente ermitteln können.¹²⁾

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Einteilchenkontinuum des Kerns auf der Grundlage der Eigenkanaltheorie von Danos, Greiner¹⁴⁾ und Wahsweiler¹⁵⁾ der inelastischen Elektronenstreuung zugänglich zu machen. Der exakteste, gewiß aber am schwersten gangbare Weg wäre freilich, die für den nichtrelativistischen Fall bereits auf zwei Teilchen im Kontinuum ausgedehnte Eigenkanaltheorie¹⁶⁾ auf das System Elektron-Nukleon-Restkern zu übertragen. Hierbei müßte man die Theorie zunächst für beide Teilchen relativistisch formulieren - wie bereits von Toepffer^{17,18)} für das Elektron allein getan wurde - und für das Nukleon zum nichtrelativistischen Grenzfall übergehen können. Würde man endlich für die Elektronen die Born'sche Näherung einführen, so wäre man auf der Stufe angelangt, auf der wir unsere Überlegungen anstellen wollen: In Analogie zur Behandlung der Kernphotoprozesse soll auch die Elektronenstreuung in 1. Ordnung Störungsrechnung an das Kernkontinuum angeschlossen werden. Dieses Programm werden wir im ersten Kapitel näher erläutern. Im zweiten Kapitel ist die Multipol-

+) Stanford, Calif.(USA); Cambridge, Mass.(USA); Saclay(Frankreich)

entwicklung des durch die Elektronen erzeugten Viererpotentials angegeben, im dritten Kapitel die der Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern. Das vierte Kapitel referiert die Grundlagen der Eigenkanaltheorie und liefert die später verwendeten Kernzustände. Die Formeln für die Anregungsquerschnitte der Kontinuumszustände einschließlich der longitudinalen und transversalen Formfaktoren werden im fünften Kapitel hergeleitet. Das sechste Kapitel schließlich bringt die Herleitung der entsprechenden Formeln für Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen. Im siebenten und letzten Kapitel werden für C^{12} einige nach der Eigenkanaltheorie numerisch berechnete Anregungsquerschnitte mit entsprechenden Experimenten verglichen.

I. Formulierung der Elektrodintegration in Störungsrechnung erster Ordnung

A. Zur Kinematik

Es ist recht nützlich, zu Beginn einige Überlegungen zur Kinematik der hier behandelten inelastischen Streuprozesse anzustellen.

Wir betrachten einen Prozeß, bei dem ein Elektron mit der Energie E_i und dem Impuls $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$ mit einem Kern zusammenstößt, diesem die Energie E und den Impuls $\vec{q} = \hbar \vec{k}$ überträgt

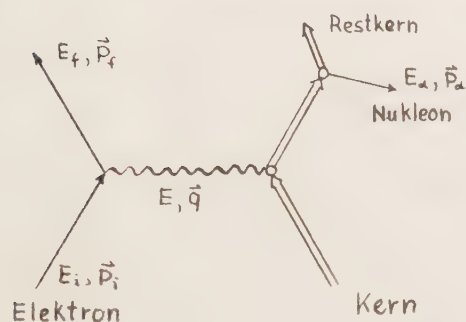


Fig. 1

und selbst mit der Energie E_f und dem Impuls $\vec{p}_f = \hbar \vec{k}_f$ weiterfliegt. Der Kern soll dabei ins Einteilchenkontinuum angeregt werden, sodaß er ein Nukleon, etwa mit der Energie E_α und dem Impuls $\vec{p}_\alpha = \hbar \vec{k}_\alpha$ emittieren kann (Fig. 1). Da wir annehmen wollen, daß der Impuls $\vec{q}$ auf den ganzen Kern übertragen wird, ist dessen Anregungs-

energie E^* um seine Rückstoßenergie $q^2/2AM$ kleiner als E :

$$E^* = E_i - E_f - \frac{q^2}{2AM}, \quad (1.1)$$

wo A die Massenzahl und M die Nukleonenmasse ($Mc^2 = 938 \text{ MeV}$) bedeutet. Die Impulsübertragung $\vec{q}$ läßt sich mit Hilfe des Impulssatzes, $\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{q}$, durch die meßbaren Größen der Impulsbeträge



Fig. 2

$p_i \approx |\vec{p}_i| \approx E_i/c$, $p_f \approx E_f/c$ und des Streuwinkels θ (Fig. 2) ausdrücken:

$$q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2 p_i p_f \cos \theta. \quad (1.2)$$

Indem wir $p_i = E_i/c$ bzw. $p_f = E_f/c$ setzen, sehen wir hier wie im folgenden die Elektronen als hochrelativistisch an.

B. Wirkungsquerschnitte in Born'scher Näherung

Nach diesen Bemerkungen zur Kinematik wollen wir nun den betrachteten Prozeß in zeitabhängiger Störungsrechnung 1. Ordnung formulieren und die später benötigten Formeln für die differentiellen Wirkungsquerschnitte sowohl für (e,e') - als auch für $(e,e'p)$ - und $(e,e'n)$ -Reaktionen bereitstellen. Wir notieren zunächst den Hamiltonoperator des Systems Elektron-Kern in der Form^{*)}

$$H(t) = \begin{cases} H_e + H_N & t < -\frac{T}{2} \\ H_e + H_N + H_{int} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \underbrace{H_e + H_N}_{H_0} & t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

wo H_e die kinetische Energie des relativistischen freien Elektrons beschreibt, H_N die Energie des Kerns einschließlich des auslaufenden Nukleons und H_{int} die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern. H_{int} möge als "Störung" zur Zeit $t = -\frac{T}{2}$ ein- und zur Zeit $t = +\frac{T}{2}$ ausgeschaltet werden. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von $H(t)$ für $t < \frac{T}{2}$ (Anfangszustand) und $|f\rangle$ ein solcher für $t > \frac{T}{2}$ (Endzustand), so wird in 1. Ordnung die Übergangsamplitude

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \langle f | H_{int} | i \rangle \quad (1.4)$$

Daß die Zustände $|f\rangle$ und $|i\rangle$ gemäß der Aufspaltung des Hamiltonoperators in (1.3) lediglich Lösungen der Diracgleichung des freien Elektrons enthalten, ist ein charakteristischer Zug der Born'schen Näherung (mit ebenen Wellen). Der differentielle Wirkungsquerschnitt σ ist dann bis auf die Dichte der Endzustände

*) Wir folgen hier im wesentlichen der Betrachtungsweise von L.I. Schiff¹⁹⁾

$\varrho(E_i)$ proportional dem Quadrat der Übergangsamplitude:

$$\sigma \sim |S_{fi}|^2 \varrho(E_i) \quad (1.5)$$

Für das Matrixelement $\langle f | H_{int} | i \rangle$ der elektromagnetischen Wechselwirkung ergibt sich nach dem Bild der Møller-Potentiale^{20,21)} im Grenzfall nichtrelativistischer Nukleonen der Lorentz-kovariante Ausdruck

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = \frac{1}{c} \int A_\mu^e(x)_{fi} J_N^\mu(x)_{fi} d^4x \quad (1.6)$$

wo $A_\mu^e(x)_{fi}$ das vom Elektron erzeugte Viererpotential, $J_N^\mu(x)_{fi}$ die Viererübergangsstromdichte im Kern und x den Ortsvektor im vierdimensionalen Minkowski-Raum darstellt⁺). Da sowohl $A_\mu^e(x)_{fi}$ als auch $J_N^\mu(x)_{fi}$ Produkte aus Wellenfunktionen mit der Zeitabhängigkeit $\exp(-i \frac{E_{fi}}{\hbar} t)$ sind, können wir schreiben:

$$A_\mu^e(x) = A_\mu^e(\vec{r}) \cdot e^{i \frac{E_f - E_i}{\hbar} t} \quad (1.7)$$

$$J_N^\mu(x) = J_N^\mu(\vec{r}) \cdot e^{i \frac{E}{\hbar} t} \quad (1.8)$$

Damit erhalten wir für die Übergangsamplitude

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i}{\hbar c} \int A_\mu^e(\vec{r}) J_N^\mu(\vec{r}) d^3\vec{r} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i \frac{E_f - E_i + E}{\hbar} t} dt \\ &\equiv H_{fi} \\ &= -\frac{i}{\hbar} H_{fi} \cdot 2 \frac{\sin \frac{E_f - E_i - E}{\hbar} \cdot \frac{T}{2}}{\frac{E_f - E_i + E}{\hbar}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

+) Bei der Lorentz-kovarianten Schreibweise lehnen wir uns hier eng an Bjorken und Drell²²⁾ an, setzen jedoch nicht $\hbar = c = 1$

und mit $T \rightarrow \infty$ für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Zustand

$$\begin{aligned}
 W &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi \frac{T}{2\hbar}} \frac{\sin^2 \frac{T}{2\hbar} (E_f - E_i + E)}{(E_f - E_i + E)^2} \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \delta \left(E_f - E_i + \underbrace{E^*}_{= E} + \frac{q^2}{2AM} \right) . \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Um zu einer Aussage über den Wirkungsquerschnitt zu kommen, müssen wir noch die Art des Meßprozesses festlegen. Wir interessieren uns hier

1. für den Anregungsquerschnitt des Kerns, $\frac{d^2\sigma}{d\Omega_f dE_f}$, d.h., Messung der Ausfallsrichtung des Elektrons und seines Energieverlustes, und
2. für den Anregungsquerschnitt mit Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen, $\frac{d^3\sigma}{d\Omega_f dE_f d\Omega_a}$, d.h., Messung der Ausfallsrichtung des Elektrons und seines Energieverlustes und zusätzlich der Ausfallsrichtung des Nukleons mit Koinzidenzbedingung.

Im ersten Fall bedeutet ein Zählimpuls in der Meßapparatur, daß sich das ausfallende Elektron in einem der Zustände $|\vec{p}_f\rangle$ aus dem Impulsintervall $d^3\vec{p}_f$ und der Kern in einem der Energiezustände $|E^*\rangle$ aus dem Energieintervall $dE^* \approx dE_f$ befand. Um aus (1.10) die Übergangswahrscheinlichkeit in einen solchen Zustand zu erhalten, brauchen wir W nur mit der Anzahl dn_f der Endzustände in diesem Intervall zu multiplizieren. Sind die Elektronenwellenfunktionen im Volumen V und die Kernwellenfunktionen im Energieintervall ΔE^* auf 1 normiert, dann wird

$$dn_f = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} d^3\vec{p}_f \cdot \frac{1}{\Delta E^*} dE^* . \quad (1.11)$$

Der Faktor $\frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3}$ bedeutet somit die Dichte der Endzustände des Elektrons und $\frac{1}{\Delta E^*}$ die Dichte der Endzustände der Kerns. Den

differentiellen Wirkungsquerschnitt erhalten wir schließlich, wenn wir noch durch den Betrag $|j_{inc}|$ der Stromdichte der einfallenden Elektronen dividieren. Mit

$$|j_{inc}| = \frac{c^2}{E_i V} |\vec{p}_i| = \frac{c^2 m v_i}{m c^2 V} = \frac{v_i}{V}, \quad (1.12)$$

Polarkoordinaten für $\vec{p}_f$,

$$d^3 \vec{p}_f = p_f^2 dp_f \sin \theta d\theta d\varphi = p_f^2 dp_f d\Omega_f, \quad (1.13)$$

und der Identität

$$p_f dp_f = \frac{1}{c^2} E_f dE_f \quad (1.14)$$

ergibt sich für die Anregung des Kernkontinuums durch ultra-relativistische Elektronen als Wirkungsquerschnitt:

$$d^3 \sigma = \frac{E_i V}{c^2 p_i} \frac{2\pi}{h} |H_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i + E^* + \frac{q^2}{2AM}) \frac{V}{(2\pi)^3 h^3} p_f \frac{E_f dE_f}{c^2} d\Omega_f \frac{1}{dE^*} dE^*. \quad (1.15)$$

Da in der Regel die Anregungsenergie E^* nicht gemessen wird, müssen wir noch über E^* integrieren und erhalten als Beitrag der den Energiesatz repräsentierenden δ -Funktion — ΔE^* ist unabhängig von E^* — den Faktor

$$\int \delta(E_f - E_i + E^* + \frac{q^2}{2AM}) dE^* \approx \frac{1}{1 + \frac{E_f - E_i}{AMc^2} + \frac{2E_i}{AMc^2} \sin^2 \theta_2}. \quad (1.16)$$

Das folgt aus der Substitution

$$E = E^* + \frac{q^2}{2AM}, \quad dE = \left\{ 1 + \frac{dq^2/dE^*}{2AM} \right\} dE^*.$$

Im zweiten Fall bedeutet ein (Koinzidenz-) Zählimpuls in der Meßapparatur, daß sich das ausfallende Elektron in einem der Zustände $|\vec{p}_e\rangle$ aus dem Impulsintervall $d^3\vec{p}_e$ und der Kern in einem derjenigen Kontinuumszustände befand, die asymptotisch die Wellenfunktion eines freien Nukleons mit einem Impuls $\vec{p}_\alpha$ aus dem Impulsintervall $d^3\vec{p}_\alpha$ enthalten. Normieren wir jetzt auch die Kernwellenfunktion in einem Kasten mit dem Volumen V auf 1, dann ist im Wirkungsquerschnitt (1.15) der Ausdruck $\frac{1}{\Delta E^*} dE^*$ durch den dem Elektron analogen Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} d^3\vec{p}_\alpha &= \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} p_\alpha^2 dp_\alpha d\Omega_\alpha \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^2} p_\alpha M dE_\alpha d\Omega_\alpha \end{aligned} \quad (1.17)$$

zu ersetzen. Die kinetische Energie E_α des ausfallenden Nukleons ist im Schwerpunktsystem des Kers definiert durch

$$E^* = E_\alpha + Q_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M} + Q_\alpha \quad (1.18)$$

Q_α bezeichnet die Dissoziationsenergie (Schwellenergie) des Nukleons.

II. Multipolentwicklung des Viererpotentials des Elektrons

A. Übergangsstromdichte und Viererpotential

Bevor wir das Viererpotential nach Multipolen entwickeln, wollen wir es durch die Wellenfunktionen des Elektrons in Anfangs- und Endzustand ausdrücken. Dazu schreiben wir zunächst den Viererstrom als Übergangsstromdichte auf und bestimmen daraus das Viererpotential mit Hilfe der kovarianten Wellengleichung. Der Vierervektor der Übergangsstromdichte sei definiert als ⁺)

$$j_e^\mu = ec \bar{\psi}(p_f, x, s_f) \gamma^\mu \psi(p_i, x, s_i) , \quad (2.1)$$

wo $e = -|e|$ die Elektronenladung, $\psi(p_i, x, s_i)$ und $\bar{\psi}(p_f, x, s_f)$ die Wellenfunktionen des Elektrons in Anfangs- und Endzustand bedeuten. Letztere sollen die Dirac-Gleichung

$$(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc) \psi = 0 \quad (2.2)$$

des freien Teilchens lösen, daher als ebene Wellen in der Form

$$\bar{\psi}(p, x, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \bar{u}(p, s) e^{i \frac{p^\mu x_\mu}{\hbar}} , \quad (2.3)$$

$$\psi(p, x, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} u(p, s) e^{-i \frac{p^\mu x_\mu}{\hbar}}$$

darzustellen sein. Dabei bezeichnet m die Ruhemasse des Elektrons, E dessen (positive) Energie und $u(p, s)$ einen zugehörigen Dirac-Spinor. Weiter ist die Wellenfunktion ψ im Volumen V auf 1 normiert. Wir notieren nun

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_e^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j_e^\mu(x) \quad (2.4)$$

⁺) siehe Bjorken und Drell ²²⁾

als kovariante Wellengleichung für das Viererpotential $A_e^\mu(x)$, identifizieren $j_e^\mu(x)$ mit der Übergangsstromdichte (2.1) und setzen die Wellenfunktionen (2.3) ein. Die Lösung heißt dann

$$A_e^\mu(x) = - \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{4\pi e mc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} \Gamma^\mu e^{-i \frac{q^\mu x_\mu}{\hbar}}, \quad (2.5)$$

mit

$$\Gamma^\mu \equiv \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^\mu u(p_i, s_i) \quad (2.6)$$

und

$$q^\mu \equiv p_i^\mu - p_f^\mu \equiv \left\{ \frac{E_i}{c} - \frac{E_f}{c}, \vec{p}_i - \vec{p}_f \right\} = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{q} \right\}. \quad (2.7)$$

Hier enthält das Viererpotential $A_e^\mu(x)$ wegen

$$q^\mu x_\mu = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{q} \right\} \{ct, -\vec{r}\} = Et - \vec{q} \cdot \vec{r} \quad (2.8)$$

noch die Zeitabhängigkeit $e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$, die wir im 1. Kapitel abgespalten haben. Für den im folgenden benötigten ortsabhängigen Anteil $A_e^\mu(\vec{r})$ können wir somit schreiben:

$$A_e^\mu(\vec{r}) \equiv \{ \varphi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}) \} = - \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{4\pi e mc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} \Gamma^\mu e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}}. \quad (2.9)$$

B. Entwicklung nach Multipolen^{†)}

Die Multipolentwicklung des Viererpotentials gewinnen wir aus der Rayleigh-Reihe für die ebene Welle

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} i^L (-)^M j_L(kr) Y_{L-M}(\hat{k}) Y_{LM}(\hat{r}) . \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen in (2.9) erhalten wir für den skalaren Anteil des Viererpotentials

$$\varphi(\vec{r}) = - \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V \sqrt{E_+ E_-}} \Gamma^0 \sum_{LM} i^L (-)^M j_L(kr) Y_{L-M}(\hat{k}) Y_{LM}(\hat{r}) . \quad (2.11)$$

Da jeder Term der Multipolordnung L in (2.11) die Parität $(-)^L$ hat, liefert das skalare Potential keinen Beitrag zum magnetischen Multipolfeld. Der Beitrag zum elektrischen Multipolfeld ist also

$$\varphi_{LM}(\vec{r}) = - \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V \sqrt{E_+ E_-}} \Gamma^0 i^L (-)^M j_L(kr) Y_{L-M}(\hat{k}) Y_{LM}(\hat{r}) . \quad (2.12)$$

Für den vektoriellen Anteil des Viererpotentials erhalten wir nach Einführung der Vektorkugelfunktionen

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V \sqrt{E_+ E_-}} \sum_{LM} i^L (-)^{M+L+1-L} j_L(kr) (\vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{L+1-M}(\hat{k})) \vec{Y}_{LM}(\hat{r}) , \quad (2.13)$$

^{†)}Die hier verwendeten Grundgleichungen finden sich im wesentlichen in den Büchern von M.E. Rose²³⁾ und A.R. Edmonds²⁴⁾. In der Darstellung folgen wir zum Teil H.R. Molloy¹⁰⁾. Eine detaillierte Herleitung bringt z.B. das Buch von J.M. Eisenberg und W. Greiner²⁵⁾.

wo die Summation über ℓ nur für $\ell = L-1, L, L+1$ erfolgt. Wir können nun die Reihe aufspalten in magnetische und elektrische Multipolanteile. Das Vektorpotential des magnetischen Multipolfeldes ergibt sich für $\ell = L$,

$$\vec{A}_{LM}(m) = -\frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} i^L (-)^{M+1} j_L(kr) (\vec{F} \cdot \vec{Y}_{LL-M}(\hat{k})) \vec{Y}_{LL-M}(\hat{r}), \quad (2.14)$$

und das des elektrischen für $\ell = L \pm 1$,

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LM}(e) = & -\frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} i^L (-)^{M+1} \left\{ j_{L+1}(kr) (\vec{F} \cdot \vec{Y}_{LL+1-M}(\hat{k})) \vec{Y}_{LL+1-M}(\hat{r}) \right. \\ & \left. - j_{L-1}(kr) (\vec{F} \cdot \vec{Y}_{LL-1-M}(\hat{k})) \vec{Y}_{LL-1-M}(\hat{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nun ist es vorteilhaft, das elektrische Vektorpotential in eine Komponente $\vec{A}_{LM}^{\parallel}(e)$ parallel und eine Komponente $\vec{A}_{LM}^{\perp}(e)$ senkrecht zur Impulsübertragung $\vec{q}$ zu zerlegen²⁵⁾:

$$\vec{A}_{LM}(e) = \vec{A}_{LM}^{\parallel}(e) + \vec{A}_{LM}^{\perp}(e), \quad (2.16)$$

mit

$$\vec{A}_{LM}^{\parallel}(e) = -\frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} i^{L-1} (-)^M \Gamma^0 \frac{\hbar q}{q^2} Y_{L-M}(\hat{k}) \vec{\nabla} (j_L(kr) Y_{LM}(\hat{r})), \quad (2.17)$$

$$\vec{A}_{LM}^{\perp}(e) = -\frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 emc^2}{V\sqrt{E_i E_f}} i^{L-1} (-)^{M+1} \left\{ \vec{F} \cdot (\hat{k} \times \vec{Y}_{LL-M}(\hat{k})) \right\} \vec{\nabla} \times (j_L(kr) \vec{Y}_{LM}(\hat{r})). \quad (2.18)$$

III. Multipolentwicklung der elektromagnetischen Wechselwirkungsenergie

Die elektromagnetische Wechselwirkungsenergie zwischen inelastisch gestreutem Elektron und Targetkern war in Gleichung (1.9) gegeben als

$$H_{fi} = \int A_e^\mu(\vec{r}) J_\mu(\vec{r})_{fi} d^3r. \quad (3.1)$$

Für die Vierer-Übergangstromdichte $J_\mu(\vec{r})_{fi}$ des Kerns können wir schreiben:

$$J_\mu(\vec{r})_{fi} = e \left\{ g(\vec{r})_{fi} - \vec{J}(\vec{r})_{fi} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\vec{J}(\vec{r})_{fi} = \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r})_{fi} + \vec{\nabla} \times \vec{\mu}(\vec{r})_{fi}, \quad (3.3)$$

wo $g(\vec{r})_{fi}$, $\vec{j}(\vec{r})_{fi}$ und $\vec{\mu}(\vec{r})_{fi}$ die Übergangsdichten der elektrischen Ladung, des Stroms und des magnetischen Moments im Kern bedeuten. Um die Multipole der elektromagnetischen Wechselwirkung zu erhalten, brauchen wir nur noch die Entwicklung für das Viererpotential aus dem letzten Kapitel,

$$A^\mu(\vec{r}) = \sum_{LM} A_{LM}^\mu(\vec{r}) = \sum_{LM} \left\{ \varphi_{LM}, A_{LM}^0(e) + A_{LM}^1(e) + A_{LM}(m) \right\}, \quad (3.4)$$

in (3.1) einzusetzen. Wir sehen dann, daß

$$H_{fi} = \sum_{LM} H_{LM} = \sum_{LM} (H_{LM}(c) + H_{LM}(e) + H_{LM}(m)) \quad (3.5)$$

ist, und

⁺) An dieser Stelle ziehen wir die Elementarladung als Faktor heraus.

$$\begin{aligned}
 H_{LM} &= e \int \underbrace{\Phi_{LM}(\vec{r}) \varrho(\vec{r})_{fi} d^3\vec{r}}_{= H_{LM}(c)} - e \int \underbrace{\vec{A}_{LM}^{el}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r})_{fi} d^3\vec{r}}_{= H_{LM}(e)} \\
 &\quad - e \int \underbrace{\vec{A}_{LM}^{mag}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r})_{fi} d^3\vec{r}}_{= H_{LM}(m)} .
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Der erste Term stellt die longitudinale Coulomb-, der zweite die transversale elektrische und der dritte die transversale magnetische Wechselwirkung der Multipolordnung L dar. Im einzelnen läßt sich mit Hilfe der Formeln (2.12) für das skalare Potential bzw. (2.17) für das longitudinale Vektorpotential unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung für den Kernstrom $\vec{J}^{\mu}$ die Coulomb-Wechselwirkung darstellen in der Gestalt

$$H_{LM}(c) = \frac{\hbar^2 (4\pi)^2 e^2 mc^2}{(g)^2 \sqrt{E_i E_f}} \Gamma^0 i^{L-1} (-)^M \frac{(g)^2}{q^2} Y_{L-1}(\hat{k}) M_{LM}^{coul} \tag{3.7}$$

mit

$$M_{LM}^{coul} = \int f_L(kr) Y_{LM}(\hat{r}) \varrho(\vec{r})_{fi} d^3\vec{r} . \tag{3.8}$$

Die transversale elektrische Multipolwechselwirkung ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke (2.18) und (3.3) in den zweiten Term von (3.6):

$$H_{LM}(e) = - \frac{\hbar^2}{(g)^2} \frac{(4\pi)^2 e^2 mc^2}{\sqrt{E_i E_f}} i^{L-1} (-)^M \vec{\Gamma} \cdot (\hat{k} \times \vec{Y}_{LM}(\hat{k})) T_{LM}^{el} \tag{3.9}$$

mit

$$T_{LM}^{el} = \frac{1}{k} \int \left\{ \vec{\nabla} \times (f_L(kr) \vec{Y}_{LM}(\vec{r})) \cdot \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r})_{fi} + k^2 f_L(kr) \vec{Y}_{LM}(\vec{r}) \cdot \vec{\mu}(\vec{r})_{fi} \right\} d^3\vec{r} \tag{3.10}$$

und die transversale magnetische Multipolwechselwirkung durch Einsetzen von (2.14) und (2.3) in den dritten Term von (3.6)

$$H_{LM}^{(3)} = -\frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 e^2 mc^2}{V \sqrt{E_i E_f}} i^{L+1} (-)^M \vec{P} \cdot \vec{Y}_{LL-M}(\hat{k}) \cdot T_{LM}^{mag} \quad (3.11)$$

mit

$$T_{LM}^{mag} = \frac{1}{i} \int \left\{ f_L(kr) \vec{Y}_{LM}(\hat{r}) \cdot \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r})_{fi} + \vec{\nabla} \times (f_L(kr) \vec{Y}_{LM}(\hat{r})) \cdot \vec{\mu}(\vec{r})_{fi} \right\} d^3r \quad (3.12)$$

Damit stellt sich die gesamte elektromagnetische Wechselwirkungsenergie (3.5) dar in der Gestalt

$$H_{fi} = \frac{\hbar^2}{(q)^2} \frac{(4\pi)^2 e^2 mc^2}{V \sqrt{E_i E_f}} \sum_{LM} i^L (-)^M \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^L}{q^2} Y_{LM}(\hat{k}) M_{LM}^{(out)} \right. \\ \left. + i \vec{P} \cdot (\hat{k} \times \vec{Y}_{LL-M}(\hat{k})) T_{LM}^e \right. \\ \left. - i \vec{P} \cdot \vec{Y}_{LL-M}(\hat{k}) T_{LM}^{mag} \right\} \quad (3.13)$$

IV. Beschreibung des Einteilchenkontinuums eines Kerns im Rahmen der Eigenkanaltheorie

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir noch keine Annahmen gemacht über das eigentliche Testobjekt der Elektronenstreuung, das Kernmodell. Dies müssen wir aber tun, wenn wir die Übergangsdichten berechnen wollen. Denn für die Übergangsdichten benötigen wir die Wellenfunktionen des Kerns, die entsprechend dem Zweck dieser Arbeit das Einteilchenkontinuum beschreiben sollen. Zur Bestimmung der Kontinuumswellenfunktionen legen wir uns hier auf das Schalenmodell in Verbindung mit der Eigenkanaltheorie der Kernreaktionen von Danos und Greiner^{14,15,16)} fest. Diese birgt neben ihrer Anschaulichkeit den Vorteil, daß sie auf eine diskrete Basis von Einteilchenzuständen führt, die man in gewohnter Weise zur Diagonalisierung des Vielteilchen-Hamiltonoperators benutzen kann. Wir wollen nun die Grundzüge der Eigenkanaltheorie kurz darlegen. Dazu notieren wir zunächst die von der gewöhnlichen Streutheorie her bekannte asymptotische Gestalt der Wellenfunktionen als Überlagerung einlaufender und auslaufender Kugelwellen:

$$\psi = \sum_c \{ A_c I_c + B_c O_c \} \varphi_c. \quad (4.1)$$

Dabei beschreibt der Index c die verschiedenen physikalischen Kanäle, d.h., Zustand des Restkerns (Targetkern) sowie Spin- und Bahndrehimpuls des Teilchens im Kontinuum. In der Schreibweise (4.1) soll die "Kanalwellenfunktion" φ_c sowohl die Wellenfunktion des Targets als auch die Winkelanteile der Teilchenwellenfunktion enthalten, während I_c bzw. $O_c = I_c^*$ nur die Radialanteile der ein- und auslaufenden Kugelwellen des Teilchens darstellen. Die Amplituden A_c und B_c sind genau wie die Radialwellen nicht unabhängig voneinander. Sie sind "per definitionem" durch die S-Matrix verknüpft, die in jeder Streutheorie, so auch in der Eigenkanaltheorie, die zentrale Rolle spielt. Die Elemente $S_{c',c}$ der S-Matrix sind in der Weise definiert, daß sie die Amplituden der in Kanälen c' auslaufenden

Kugelwellen darstellen und zwar für den Zustand, in dem nur im Kanal c eine Kugelwelle einläuft. Einen solchen Zustand schreibt man gewöhnlich in der Form

$$\psi_c = I_c \varphi_c - \sum_{c'} S_{cc'} O_{c'} \varphi_{c'} . \quad (4.2)$$

Die allgemeinere Wellenfunktion (4.1) erhält man durch Überlagerung der ψ_c mit den Amplituden A_c :

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_c A_c \psi_c = \sum_c A_c I_c \varphi_c - \sum_{cc'} S_{cc'} A_c O_{c'} \varphi_{c'} \\ &= \sum_c \{ A_c I_c - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} O_c \} \varphi_c . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für die "auslaufenden Amplituden" B_c gilt also

$$B_c = - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} . \quad (4.4)$$

Die Eigenkanaltheorie beschäftigt sich nun mit folgender Grundaufgabe: Man finde Eigenfunktionen des Hamiltonoperators derart, daß im asymptotischen Bereich die Amplituden der auslaufenden Kugelwellen jeweils mit denen der einlaufenden übereinstimmen bis auf einen für alle Kanäle gleichen Faktor. Nennen wir einen Satz Amplituden mit dieser Eigenschaft $V_c^{(\nu)}$, so erscheint (4.4) in Gestalt einer Eigenwertgleichung:

$$\sum_{c'} \tilde{S}_{cc'} V_{c'}^{(\nu)} = \varepsilon^{(\nu)} V_c^{(\nu)} . \quad (4.5)$$

Da die S -Matrix unitär ist, können wir sie in der Basis $V_c^{(\nu)}$ ihrer Eigenvektoren durch Phasen $\delta^{(\nu)}$ ausdrücken:

$$\tilde{S}_{\nu\nu'} = e^{2i\delta^{(\nu)}} \delta_{\nu\nu'} . \quad (4.6)$$

Der anschauliche Wert dieser Darstellung besteht darin, daß die "Eigenphasen" $\delta^{(v)}$ im Grenzfall elastischer Streuung mit den vertrauten Streuphasen identisch werden. Sind die Eigenphasen $\delta^{(v)}$ und die Eigenvektoren $V_c^{(v)}$ einmal bekannt, so läßt sich die S-Matrix durch die entsprechende unitäre Transformation in jeder beliebigen Basis darstellen, insbesondere in der Basis der physikalischen Kanäle c durch (vgl. (4.5), (4.6))

$$S_{cc'} = \sum_{vv'} V_c^{(v)} \tilde{S}_{vv'} V_{c'}^{(v')^{-1}} = \sum_{vv'} V_c^{(v)} e^{2i\delta^{(v)}} V_{c'}^{(v)}, \quad (4.7)$$

wo $V_c^{(v)}$ die aus den Eigenvektoren gebildete Matrix und $V_c^{(v)^{-1}}$ ihre Inverse bedeuten.

Nun wenden wir uns der Konstruktion der gesuchten Eigenfunktionen zu und stellen damit gleichzeitig die Verbindung zum Schalenmodell der Kerne her. Nehmen wir an, daß das Teilchen nur innerhalb einer Kugel mit dem Radius $r_A = a$ um den Targetkern ein mittleres Nukleonennpotential nebst Restwechselwirkung spürt, dann hat die durch

$$\psi^v = \begin{cases} \frac{i}{2} \sum_c v_c^{-\frac{1}{2}} V_c^{(v)} \{ I_c e^{-i\delta^{(v)}} - O_c e^{i\delta^{(v)}} \} \varphi_c & r_A \geq a \\ & \text{Außenraum} \\ \sum_c R_c^{(v)} \varphi_c & r_A \leq a \\ & \text{Innenraum} \end{cases} \quad (4.8)$$

definierte "Eigenkanalfunktion" das in unserer Grundaufgabe geforderte asymptotische Verhalten. Der Faktor $v_c^{-\frac{1}{2}}$ im asymptotischen Teil (v_c = Teilchengeschwindigkeit im Kanal c) normiert die Wellenfunktion auf Einheitsstrom. Nun soll die Eigenkanalfunktion aber nicht nur das richtige asymptotische Verhalten zeigen, sondern auch überall Lösung der Schrödingergleichung sein. Dazu müssen wir fordern, daß $\sum_c R_c \varphi_c$ die Schrödingergleichung löst — der asymptotische Teil tut dies nach Definition — und daß ψ^v an der Nahtstelle a mindestens einmal stetig differenzierbar ist:

$$\lim_{r_A \rightarrow a+0} \psi^v = \lim_{r_A \rightarrow a-0} \psi^v \quad \lim_{r_A \rightarrow a+0} \frac{\partial \psi^v}{\partial r_A} = \lim_{r_A \rightarrow a-0} \frac{\partial \psi^v}{\partial r_A} \quad (4.10)$$

Um eine Funktion zu konstruieren, welche all diese Bedingungen erfüllt, entwickeln wir die Radialwellenfunktion R_c nach Eigenfunktionen $u_{nAc}^v(r_A)$ der Schrödingergleichung unter der Randbedingung

$$\left. \frac{\frac{d}{dr_A} u_{nAc}^v(r_A)}{u_{nAc}^v(r_A)} \right|_{r_A=a} = \left. \frac{\frac{d}{dr_A} \{I_c(r_A) e^{-i\delta^{(v)}} - O_c(r_A) e^{+i\delta^{(v)}}\}}{I_c(r_A) e^{-i\delta^{(v)}} - O_c(r_A) e^{+i\delta^{(v)}}} \right|_{r_A=a} \quad (4.11)$$

und schreiben

$$R_c^{(v)}(r_A) = N_v^{-1} \cdot \sum_{n_A} A_{nAc}^v \frac{1}{r_A} u_{nAc}^v(r_A) \quad (4.12)$$

Hierbei denken wir uns die $u_{nAc}^v(r_A)$ in der Kugel mit $r_A \leq a$ auf 1 normiert, sodaß wir zur Renormierung auf Einheitsstrom den Faktor N_v^{-1} anzubringen haben. Erheben für $R_c^{(v)}(r_A)$ noch die Forderung

$$\left. R_c^{(v)}(r_A) \right|_{r_A=a} = \frac{i}{2} v_c^{-1/2} V_c^{(v)} \left\{ I_c(r_A) e^{-i\delta^{(v)}} - O_c(r_A) e^{+i\delta^{(v)}} \right\} \Big|_{r_A=a} \quad (4.13)$$

dann sind, wie man leicht einsieht, die beiden Bedingungen in (4.9) erfüllt. Die Grundaufgabe der Eigenkanaltheorie können wir also als gelöst betrachten, wenn sichergestellt ist, daß Ψ^v den Hamiltonoperator des A-Nukleonensystems (Targetkern: A-1 Nukleonen) diagonalisiert, und zwar mit der richtigen Gesamtenergie

$$E = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2M_{red}} + Q_c \quad \text{für alle } c. \quad (4.14)$$

Dabei bedeutet $\hbar^2 k_c^2 / 2M_{red}$ die asymptotische kinetische Energie des Streuteilchens, Q_c die "Ionisierungsarbeit" (Schwellenergie) im Kanal c. Bevor wir auf die praktische Methode zur Lösung des Eigenkanalproblems eingehen, vollziehen wir noch seine Einbettung in die vertrauten Terminologien des Schalenmodells. Auf Grund der Entwicklung (4.12) bereitet es keine Schwierigkeiten, Ψ^v mit den entsprechenden Schalenmodellwellenfunktionen

zu identifizieren. Beschränken wir uns hier auf die 1-Teilchen-1-Loch-Näherung, so können wir etwa auf die Teilchen-Loch-Funktionen von V. Gillet²⁶⁾ zurückgreifen und setzen:

$$\Psi_E^{j^{\pi\nu}} = N_{j^{\pi\nu}}^{-1} \sum_{n_A c} A_{n_A c}^{j^{\pi\nu}} \frac{1}{r_A} u_{n_A c}^{\nu}(r_A) \varphi_c = N_{j^{\pi\nu}}^{-1} \sum_{\substack{n_A l_A j_A \\ n_a l_a j_a m_c^A}} A_{n_A l_A j_A n_a l_a j_a m_c^A}^{j^{\pi\nu}} |j_a j_A; m_c^A\rangle^{\nu} \quad (4.15)$$

mit

$$|j_a j_A; m_c^A\rangle^{\nu} = \sum_m (-)^{j_A - m} (j_a j_A \ M+m \ -m | JM) |(\ell_a s_a) j_a \ M+m\rangle^* |(\ell_A s_A) j_A -m\rangle |T_a m_c^A\rangle^* |T_A m_c^A\rangle \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{r_A} u_{n_A l_A j_A}(r_A) \cdot \frac{1}{r_a} u_{n_a l_a j_a}^{\nu}(r_a) \quad .$$

In der Bezeichnungsweise lehnen wir uns ebenfalls an Gillet an: Die mit A indizierten Größen beziehen sich auf das Teilchen, die mit a indizierten auf das "Loch". Mit $n_A l_A j_A$ bzw. $n_a l_a j_a$ bezeichnen wir die Radial-Bahndrehimpuls- und Gesamtdrehimpulsquantenzahlen des Teilchens bzw. Loches. Entsprechend der Kopplung der Zustände zu gutem Gesamtdrehimpuls JM und guter Parität π des Compoundkerns sind die entscheidenden Größen gegenüber etwa (4.12) mit dem Index ν versehen worden. Der einzige Unterschied zu Gillet besteht hier darin, daß die Radialfunktionen $u_{n_A l_A j_A}^{\nu}(r_A)$ sowie die Teilchen-Loch-Amplituden $A_{n_A c}^{j^{\pi\nu}}$ wegen der vom Eigenkanal ν (über die Eigenphase δ_j^{ν}) abhängigen Randbedingung zusätzlich noch durch die Quantenzahl ν charakterisiert sind. Der Kanal c wird somit in dieser Schreibweise mit der Kombination $l_A j_A n_a l_a j_a m_c^A$ identifiziert.

Die praktische Lösung des Eigenkanalproblems^{27,28)} stellt uns vor die Aufgabe, sowohl die S-Matrix als auch den Hamiltonoperator des Kerns in der Basis der Teilchen-Loch-Funktionen (4.15) simultan zu diagonalisieren. Dabei ist die Anregungsenergie $E = \hbar^2 k_a^2 / 2M + Q_a > 0$ des Compoundkerns vorgegeben, und gesucht sind die Eigenphasen δ_j^{ν} , die Eigenvektoren $V_c^{j^{\pi\nu}}$ und die Teilchen-Loch-Amplituden $A_{n_A c}^{j^{\pi\nu}}$. Zur Demonstration der im praktischen Fall verwendeten Lösungsmethode denken wir uns folgende

Rechnung ausgeführt: Für eine beliebig vorgegebene Phase δ werden in allen Kanälen ($c = \alpha \ell_A \delta_A$; $k_\alpha = \sqrt{2ME/\hbar^2 - Q_\alpha}$) die logarithmischen Ableitungen f_c an der Stelle $r_A = \alpha$ bestimmt, und der Hamiltonoperator in dem durch die Randbedingungen f_c erzeugten System von orthonormalen Basiszuständen diagonalisiert. Im allgemeinen wird dann keine der zugehörigen Eigenenergien E_λ mit der vorher festgelegten Anregungsenergie übereinstimmen:

Man hat δ falsch gewählt.

Variiert man aber δ zwischen 0 und π , so ergibt sich für die Eigenenergien E_λ als Funktionen von δ der in Fig. 3 dargestellte monotone Verlauf. Die Schnittpunkte mit der Parallelen $E = \hbar^2 k_\alpha^2 / 2M + Q_\alpha$ zur δ -Achse liefern offensichtlich die gesuchten Eigenphasen $\delta_{j^v}^v$. Da auch

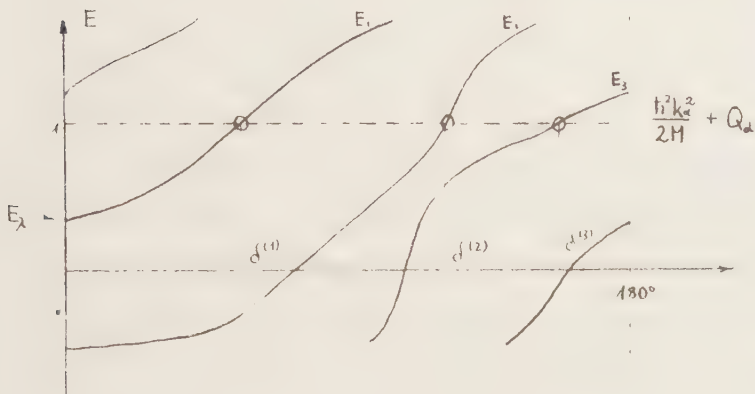


Fig. 3

die Koeffizienten $A_{n\alpha c}^{j^v}$ durch die Diagonalisierung bekannt sind, lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren der S-Matrix aus der Stetigkeitsbedingung (4.13) berechnen, wenn auch in ihrer unnormierten Form:

$$C_c^{j^v} = N_{j^v} \cdot V_c^{j^v} = \frac{\sum_{n\alpha} A_{n\alpha c}^{j^v} u_{n\alpha \ell_A \delta_A}^v(r_A)}{u_c^{-1/2} \{ I_c e^{-i\delta_{j^v}} - O_c e^{i\delta_{j^v}} \}} \Big|_{r_A=\alpha}. \quad (4.17)$$

Der Normierungsfaktor folgt aber sofort aus

$$\sum_c (C_c^{j^v})^2 = N_{j^v}^2. \quad (4.18)$$

V. Anregungsquerschnitt in das Einteilchenkontinuum

A. Übergangsmatrixelemente

Auf der Grundlage der im vorigen Kapitel hergeleiteten Wellenfunktionen des Einteilchenkontinuums ist es nun möglich, alle eingangs erwähnten Wirkungsquerschnitte auszurechnen. Wir beginnen mit den Anregungsquerschnitten und bestimmen zunächst die Matrixelemente (3.8), (3.10) und 3.12) für einen Übergang vom Grundzustand (0^+) in einen der beschriebenen Eigenkanalzustände $\Psi_E^{J,\pi}$ der Anregungsenergie E . Dazu gehen wir von den Matrixelementen zu den entsprechenden Einteilchenoperatoren im Schalenmodell über, schreiben diese in zweiter Quantisierung und bilden damit wieder die Übergangsmatrixelemente, aber für die angegebenen Zustände. Im longitudinalen Fall notieren wir als Übergangsoperator (vgl. (3.8))

$$M_{op}^{LH} = \int f_L(kr) Y_{LH}(\hat{r}) \varrho_{op}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3\vec{r} \quad , \quad (5.1)$$

wobei wir unter ϱ_{op} den Ladungsdichteoperator einer Punktladung verstehen:

$$\varrho_{op}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \sum_{j=1}^A e_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (5.2)$$

mit $e_j=1$ für Protonen und $e_j=0$ für Neutronen. Das Matrixelement von (5.1) zwischen zwei Zuständen $|i\rangle$ und $|f\rangle$ wird dann

$$\begin{aligned} \langle f | M_{op}^{LH} | i \rangle &= \langle f | \int f_L(kr) Y_{LH}(\hat{r}) \sum_{j=1}^A e_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) d^3\vec{r} | i \rangle \\ &= \langle f | \sum_{j=1}^A e_j f_L(kr_j) Y_{LH}(\hat{r}_j) | i \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Schreiben wir jetzt den Einteilchenoperator in zweiter Quantisierung als

$$\sum_{j=1}^A e_j f_j(kr_j) Y_{LM}(\hat{r}_j) = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | f_j(kr) Y_{LM}(\hat{r}) | \beta \rangle \delta_{m_\tau, \frac{1}{2}} a_\alpha^\dagger a_\beta, \quad (5.4)$$

so erhalten wir für einen Übergang aus einem 0^+ -Grundzustand:

$$\langle f | M_{LM} | 0^+ \rangle = \sum_{A\alpha} \langle A | f_j(kr) Y_{LM}(\hat{r}) | \alpha \rangle \langle f | a_\alpha^\dagger a_\alpha | 0 \rangle \delta_{m_\tau, \frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Dabei bezeichnen $|A\rangle$ und $|\alpha\rangle$ die Einteilchenzustände über bzw. unter der Fermikante und $a_\alpha^\dagger$ bzw. a_α die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Das Kroneckersymbol $\delta_{m_\tau, \frac{1}{2}}$ sorgt dafür, daß nur über Protonenzustände (Isospinprojektion $m_\tau^A = \frac{1}{2}$) summiert wird. Bei der expliziten Rechnung verwenden wir jetzt für $|A\rangle$ die Einteilchenzustände

$$|A\rangle = \frac{1}{r} u_{n_A l_A j_A}^v(r) |(l_A s_A) j_A m\rangle |T_A m_\tau^A\rangle \quad (5.6)$$

und für $|\alpha\rangle$ die Einteilchenzustände

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{r} u_{n_\alpha l_\alpha j_\alpha}(r) |(l_\alpha s_\alpha) j_\alpha M+m\rangle |T_\alpha m_\tau^\alpha\rangle \quad (5.7)$$

aus Gleichung (4.16). Damit verstehen sich α und A als Abkürzungen der Quantenzahlkombinationen

$$\alpha \equiv n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\tau^A m_\alpha \equiv \alpha m_\alpha \quad (m_\alpha = M+m) \quad (5.8)$$

$$A \equiv n_A l_A j_A m_\tau^A m_A \quad (m_A = m) \quad (5.9)$$

Für den Endzustand $|f\rangle$ setzen wir die Wellenfunktion $\psi_E^{j,v}$ des v -ten entarteten Eigenkanals mit der Eigenenergie E ein. Jedoch normieren wir $\psi_E^{j,v}$ nicht wie in (4.15) im Volumen 1 (Einheitsstrom) sondern im Energieintervall ΔE (Weyl-Normierung) auf 1.¹⁵⁾

Das ergibt einen zusätzlichen Faktor $(2\Delta E/\pi\hbar)^{1/2}$. Im einzelnen wird

$$\begin{aligned} \langle A | f_L(kr) Y_{LM}(\hat{r}) | a \rangle &= \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A | f_L(kr) Y_{LM}(\hat{r}) | n_a l_a j_a m_a^A \rangle \\ &= (-)^{j_a - m_a} [2L+1]^{-\frac{1}{2}} (j_A j_a m_A - m_a | LM) \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A || f_L(kr) Y_L(\hat{r}) || n_a l_a j_a m_a^A \rangle, \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\langle f | a_A^\dagger q_a | 0 \rangle = \left(\frac{2\Delta E}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} N_{j\nu}^{-1} \underbrace{\tilde{A}_{\alpha n_A l_A j_A}^{j\nu}}_{(-)^{j_A - j_a} \tilde{A}_{\alpha n_A l_A j_A}^{j\nu}} (-)^{j_a - m_a + M} (j_a j_A m_a - m_A | JM) \quad (5.11)$$

Setzen wir die Ausdrücke (5.10) und (5.11) in das Matrixelement (5.5) ein und führen die Summation über die Drehimpulsprojektionen m_a und m_A aus, so erhalten wir schließlich für die Übergangsamplitude in einen Eigenkanalzustand $|f\rangle \equiv |EJM\rangle \equiv \left(\frac{2\Delta E}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_E^{J,M}$

$$\begin{aligned} \langle EJM | M_{LH} | 0 \rangle_{op} &= \left(\frac{2\Delta E}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} [2L+1]^{-\frac{1}{2}} (-)^M \sum_{\substack{n_A l_A j_A m_A^A \\ n_a l_a j_a}} N_{j\nu}^{-1} \tilde{A}_{\substack{n_A l_A j_A m_A^A \\ n_a l_a j_a}}^{j\nu} \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A || f_L(kr) Y_L(\hat{r}) || n_a l_a j_a m_a^A \rangle \\ &\quad \times \delta_{m_a^A \frac{1}{2}} \delta_{LJ} \delta_{MH} \quad (5.12) \end{aligned}$$

Das reduzierte Matrixelement in (5.12) ergibt sich zu ⁶⁾

$$\begin{aligned} \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A || f_L(kr) Y_L(\hat{r}) || n_a l_a j_a m_a^A \rangle &= (-)^{j_a - j_A + l_A} \left[\frac{(2l_A+1)(2l_a+1)(2j_A+1)(2j_a+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times W(j_A \frac{1}{2} L l_a; l_A j_a) \cdot (l_A l_A 00 | L0) \times \\ &\quad \times \int u_{n_A l_A j_A}^{\nu}(r) f_L(kr) u_{n_a l_a j_a}^{\nu}(r) dr \quad (5.13) \end{aligned}$$

Nachdem wir nun das Matrixelement der longitudinalen Coulombwechselwirkung auf die numerisch leicht auszuwertende Form (5.12) gebracht haben, tun wir dies in analoger Weise auch für die transversale elektrische und magnetische Multipolwechselwirkung. Entsprechend schreiben wir

$$T_{\text{op}}^{\text{el}} = \frac{1}{k} \int \left\{ \vec{\nabla} \times (j_L(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r})) \cdot \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) + k^2 j_L(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r}) \cdot \vec{\mu}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \right\} d^3\vec{r} \quad (5.14)$$

für den Übergangsoperator der transversalen elektrischen (vgl. (3.10)) und

$$T_{\text{op}}^{\text{mag}} = \frac{1}{i} \int \left\{ j_L(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r}) \cdot \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) + \vec{\nabla} \times (j_L(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r})) \cdot \vec{\mu}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \right\} d^3\vec{r} \quad (5.15)$$

für den Übergangsoperator der transversalen magnetischen Wechselwirkung (vgl. (3.12)). Dabei beschreibt

$$\vec{j}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \frac{\hbar}{iM} \sum_{j=1}^A \{ e_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \vec{p}_{j \text{ sym}} \} \quad (5.16)$$

die Stromdichte und

$$\vec{\mu}_{\text{op}}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \frac{\hbar}{2Mc} \sum_{j=1}^A \gamma_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \vec{\sigma}_j \quad (5.17)$$

die Magnetisierungsdichte eines Ensembles punktförmiger Teilchen. Insbesondere ist $e_j = 0$, $\gamma_j = -1.91$ für Neutronen und $e_j = 1$, $\gamma_j = 2.79$ für Protonen. Im Hinblick auf die weiteren Rechnungen ist es bequem, das Vektorprodukt in (5.14) und (5.15) durch Tensoren der Stufen $L+1$ und $L-1$ auszudrücken:

$$\vec{\nabla} \times (j_L(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r})) = -ik \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} j_{L+1}(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r}) + ik \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} j_{L-1}(kr) \vec{Y}_{\text{LM}}(\hat{r}) \quad (5.18)$$

Setzen wir dies zusammen mit (5.16) bzw. (5.17) in die Ausdrücke (5.14) bzw. (5.15) ein und führen die Integrale über die

δ -Funktionen aus, so gewinnen wir die Operatoren T_{LM}^{el}
 bzw. T_{LM}^{mag} in der Gestalt

$$T_{LM}^{el} = \sum_{j=1}^A \left\{ \left(-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{LM}(k r_j) \vec{Y}_{L+1,M}(\hat{r}_j) + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{L-1,M}(k r_j) \vec{Y}_{L-1,M}(\hat{r}_j) \right) \cdot \frac{\hbar}{Mc} e_j \vec{p}_j \right. \\ \left. + k j_L(k r_j) \vec{Y}_{LM}(\hat{r}_j) \cdot \frac{\hbar}{2Mc} \gamma_j \vec{\sigma}_j \right\} , \quad (5.19)$$

$$T_{LM}^{mag} = \sum_{j=1}^A \left\{ \left(-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{LM}(k r_j) \vec{Y}_{L+1,M}(\hat{r}_j) + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{L-1,M}(k r_j) \vec{Y}_{L-1,M}(\hat{r}_j) \right) \cdot k \frac{\hbar}{2Mc} \gamma_j \vec{\sigma}_j \right. \\ \left. - j_L(k r_j) \vec{Y}_{LM}(\hat{r}_j) \cdot \frac{\hbar}{Mc} e_j \vec{p}_j \right\} . \quad (5.20)$$

Ihre Übergangsmatrixelemente aus dem O^+ -Grundzustand in den
 Eigenkanalzustand $|f\rangle = |E J M_f \nu\rangle$ lassen sich dann analog (5.5)
 in der Form

$$\langle E J M_f \nu | T_{LM}^{el, mag} | 0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | T_{LM}^{el, mag} | \alpha \rangle \langle E J M_f \nu | \alpha_A^+ \alpha_A | 0 \rangle \quad (5.21)$$

$$= \sum_{\substack{n_a l_a j_a m_a^A \\ n_A l_A j_A}} [2J+1]^{-\frac{1}{2}} \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A | T_{J,0}^{el, mag} | n_a l_a j_a m_a^A \rangle \cdot \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} N_{J,0}^{-1} \tilde{A}_{n_a l_a j_a m_a^A}^{J,0} \quad (5.22)$$

schreiben. Dabei haben wir das Wigner-Eckart-Theorem sowie die
 Amplitude aus (5.11) benutzt. Explizit ergibt sich schließlich
 für die elektrische Übergangsamplitude

$$\langle E J M_f \nu | T_{LM}^{el} | 0 \rangle = \\ = \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} [2J+1]^{-\frac{1}{2}} (-)^M \sum_{\substack{n_a l_a j_a m_a^A \\ n_A l_A j_A}} N_{J,0}^{-1} \tilde{A}_{n_a l_a j_a m_a^A}^{J,0} \left\{ -\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A | j_{J+1} \vec{Y}_{J+1} \vec{p} | n_a l_a j_a m_a^A \rangle \frac{\hbar}{Mc} e_{m_a^A} \right. \\ \left. + \left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A | j_{J-1} \vec{Y}_{J-1} \vec{p} | n_a l_a j_a m_a^A \rangle \frac{\hbar}{Mc} e_{m_a^A} \right. \\ \left. + k \langle \nu n_A l_A j_A m_A^A | j_J \vec{Y}_J \vec{\sigma} | n_a l_a j_a m_a^A \rangle \frac{\hbar}{2Mc} \gamma_{m_a^A} \right\} \quad (5.23)$$

$$\text{mit } e_{m_a^A} \equiv \delta_{m_a^A, \frac{1}{2}} , \quad \gamma_{m_a^A} \equiv 2.79 \delta_{m_a^A, \frac{1}{2}} - 1.91 \delta_{m_a^A, -\frac{1}{2}} . \quad (5.24)$$

und für die magnetische Übergangsamplitude

$$\begin{aligned}
 \langle E J H_f v | T_{op}^{mag} | 0 \rangle = & \quad (5.25) \\
 = & \left(\frac{2AE}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} [2J+1]^{-\frac{1}{2}} (-)^H \sum_{\substack{n_a l_a j_a m_a^* \\ n_b l_b j_b}} N_{Jv}^{-1} \tilde{A}_{n_a l_a j_a m_a^*}^{Jv} \left\{ - \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle v n_a l_a j_a m_a^* \| f_{J+1} \vec{Y}_{J+1} \vec{\sigma} \| n_b l_b j_b m_b^* \rangle \cdot \hbar \frac{e \hbar}{2Mc} \gamma_{m_b^*}^* \right. \\
 & + \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle v n_a l_a j_a m_a^* \| f_{J-1} \vec{Y}_{J-1} \vec{\sigma} \| n_b l_b j_b m_b^* \rangle \cdot \hbar \frac{e \hbar}{2Mc} \gamma_{m_b^*}^* \\
 & \left. - \langle v n_a l_a j_a m_a^* \| f_J \vec{Y}_J \vec{\nabla} \| n_b l_b j_b m_b^* \rangle \frac{e \hbar}{Mc} e_{m_b^*} \right\}
 \end{aligned}$$

mit den reduzierten Matrixelementen

$$\begin{aligned}
 \langle v n_a l_a j_a m_a^* \| f_J \vec{Y}_J \vec{\sigma} \| n_b l_b j_b m_b^* \rangle = & \quad (5.26) \\
 = & (-)^{l_a} \sqrt{6} \left[\frac{(2l_a+1)(2l_b+1)(2j_a+1)(2j_b+1)(2J+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ \wedge & 1 & J \end{matrix} \right\} (l_a l_b \ 00 | \wedge 0) \times \\
 & \times \int_0^\infty u_{n_a l_a j_a}^v(r) f_J(kr) u_{n_b l_b j_b}(r) dr
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \langle v n_a l_a j_a m_a^* \| f_J \vec{Y}_J \vec{\nabla} \| n_b l_b j_b m_b^* \rangle = & \quad (5.27) \\
 = & (-)^{l_a+j_a+j_b} \left[\frac{(2l_a+1)(2l_b+1)(2j_a+1)(2j_b+1)(2J+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} W(j_a \frac{1}{2} J l_a; l_b j_b) \times \\
 & \times \left\{ W(\wedge J l_a+1 l_a; 1 l_b) (l_a+1 l_b \ 00 | \wedge 0) \left[\frac{(l_a+1)(2l_a+3)}{(2l_a+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty u_{n_a l_a j_a}^v(r) f_J(kr) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l_a+1}{r} \right) u_{n_b l_b j_b}(r) dr \right. \\
 & \left. + W(\wedge J l_a-1 l_a; 1 l_b) (l_a-1 l_b \ 00 | \wedge 0) \left[\frac{l_a(2l_a-1)}{(2l_a+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty u_{n_a l_a j_a}^v(r) f_J(kr) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l_a}{r} \right) u_{n_b l_b j_b}(r) dr \right.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir auch die transversalen elektrischen und magnetischen Übergangsmatrixelemente auf die übliche für numerische Auswertungen bequeme Gestalt gebracht. Darüber hinaus gestattet uns die vorliegende Form der Matrixelemente, die Auswahlregeln für elektromagnetische Übergänge unmittelbar an den Clebsch-Gordan-Koeffizienten abzulesen. Die longitudinale Übergangsamplitude ist proportional dem Koeffizienten $(l_a l_A 00 | J 0)$, während sich die transversale elektrische als Linearkombination von $(l_a l_A 00 | J 0)$, $(l_a + 1 l_A 00 | J \pm 1 0)$ und $(l_a - 1 l_A 00 | J \pm 1 0)$ darstellt. Die magnetische Übergangsamplitude ist eine Linearkombination von $(l_a l_A 00 | J \pm 1 0)$ und $(l_a \pm 1 l_A 00 | J 0)$. Nun unterscheidet sich ein Clebsch-Gordan-Koeffizient $(j_1 j_2 00 | J 0)$ nur dann von Null, wenn $j_1 + j_2 + J$ eine gerade Zahl ist. Daher muß die Parität $\pi = (-1)^{l_a + l_A}$ des Endzustandes (bei Übergängen aus dem O^+ -Grundzustand) immer gleich der Parität $(-1)^J$ bzw. $(-1)^{J+1}$ des CJ- oder EJ- bzw. MJ-Übergangs sein. Dies ist aber identisch mit der Aussage, daß ein Übergang vom O^+ -Grundzustand in einen Endzustand mit gutem Gesamtdrehimpuls und guter Parität entweder nur ein elektrischer (Coulomb- und elektrisch-transversal) oder nur ein magnetischer Übergang sein kann.

B. Anregungsquerschnitt

Bei der Berechnung des Anregungsquerschnittes gehen wir davon aus, daß die Projektionen M_i und s_i von Kern- und Elektronenspin im Anfangszustand sowie die entsprechenden Projektionen M_f und s_f im Endzustand nicht gemessen werden. Das Gleiche gilt für den Drehimpuls J des Endzustandes, dessen Parität π und für die Eigenkanäle ν . Wir müssen daher die Wirkungsquerschnitte über alle Anfangsprojektionen mitteln ($\frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \frac{1}{2} \sum_{s_i} = \frac{1}{2} \sum_{s_i}$) und über alle Kernspins, Paritäten und die betreffenden Projektionsquantenzahlen des Endzustandes wie auch über die Eigenkanäle summieren ($\sum_{\nu} \sum_{J_f, M_f, s_f}$). Entsprechend ist dann nach Formel (1.15) der Anregungsquerschnitt proportional

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu} \sum_{J_f, M_f, s_f} |H_{fi}|^2.$$

Diese Summe rechnen wir jetzt aus, indem wir den Ausdruck (3.13) für die Wechselwirkungsenergie einsetzen:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu, J_f, M_f, s_f} |H_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} \sum_{\nu, J_f, M_f, s_f} \sum_{L', M', L, M} (-i)^{L'} (-)^{M'} i^L (-)^M \times \quad (5.29)$$

$$\times \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^4}{q^2} Y_{L', M'}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | M_{L', M'} | 0 \rangle + i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{L', M'}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | T_{L', M'}^d | 0 \rangle - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{L', M'}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | T_{L', M'}^{\text{mag}} | 0 \rangle \right\}^*$$

$$\times \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^4}{q^2} Y_{L, M}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | M_{L, M} | 0 \rangle + i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{L, M}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | T_{L, M}^d | 0 \rangle - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{L, M}(\hat{k}) \langle E J_f \nu | T_{L, M}^{\text{mag}} | 0 \rangle \right\}.$$

Gehen wir vermöge der Wigner-Eckart-Theorems von den Matrixelementen in (5.29) zu den reduzierten Matrixelementen über und definieren

$$\begin{aligned} \langle E J_f \nu | M_{L, M}^{\text{red}} | 0 \rangle &= \frac{(J \ 0 \ M_f \ 0 | L \ M)}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} \langle E J_f \nu | M_{L, M}^{\text{red}} | 0 \rangle \\ &= \frac{\delta_{JL} \delta_{M_f M}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} \langle E J_f \nu | M_{L, M}^{\text{red}} | 0 \rangle \equiv \left(\frac{2AE}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_{JL} \delta_{M_f M}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} M_{L, M}^{\nu}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\langle E J^{\pi} M_i \nu | T_{LH}^{el} | 0 \rangle \equiv \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_{JL} \delta_{M_i H}}{[2J+1]^{\frac{1}{2}}} T_{(eL)}^{\nu} , \quad (5.31)$$

$$\langle E J^{\pi} M_i \nu | T_{LH}^{mag} | 0 \rangle \equiv \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_{JL} \delta_{M_i H}}{[2J+1]^{\frac{1}{2}}} T_{(mL)}^{\nu} , \quad (5.32)$$

so folgt :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\nu M_i s_i} |H_{fi}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu J^{\pi}} [2J+1]^{\frac{1}{2}} \sum_{M_i s_i} \times \\ &\times \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^i}{q^2} Y_{J-H_i}(\hat{k}) M_{(eJ)}^{\nu} + i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) T_{(eJ)}^{\nu} - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) T_{(mJ)}^{\nu} \right\}^* \\ &\times \left\{ \right. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Da der Endzustand definierte Parität hat und deshalb immer entweder $M_{(eJ)}^{\nu} = T_{(eJ)}^{\nu} = 0$ oder $T_{(mJ)}^{\nu} = 0$ ist, wird nach Ausmultiplizieren der geschweiften Klammer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\nu M_i s_i} |H_{fi}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu J^{\pi}} [2J+1]^{\frac{1}{2}} \sum_{M_i s_i} \left\{ \frac{(q)^4}{q^4} \left(\Gamma^0 Y_{J-H_i}(\hat{k}) \right)^* \left(\Gamma^0 Y_{J-H_i}(\hat{k}) M_{(eJ)}^{\nu} \right)^2 \right. \\ &+ i \frac{(q)^2}{q^2} \left(\Gamma^0 Y_{J-H_i}(\hat{k}) \right)^* \left(\vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right) M_{(eJ)}^{\nu} T_{(eJ)}^{\nu} - i \frac{(q)^2}{q} \left(\vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right)^* \left(\Gamma^0 Y_{J-H_i}(\hat{k}) \right) M_{(eJ)}^{\nu} T_{(eJ)}^{\nu} \\ &+ \left(\vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right)^* \left(\vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right) T_{(eJ)}^{\nu 2} \\ &\left. + \left(\vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right)^* \left(\vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{JJ-H_i}(\hat{k}) \right) T_{(mJ)}^{\nu 2} \right\} . \quad (5.34) \end{aligned}$$

Zur Ausführung der Summen über die Spinprojektionen s_i des Elektrons denken wir daran, daß nach Definition

$$\Gamma^{\mu} = [u(p_i s_i) \gamma^{\mu} u(p_i s_i)] = \{ u(p_i s_i) \hat{\gamma} u(p_i s_i), u(p_i s_i) \vec{\gamma} u(p_i s_i) \} = \{ \Gamma^0, \vec{\Gamma} \} \quad (5.35)$$

war. Auf Grund der Beziehung ²²⁾

$$\sum_{s_i s_i} [\bar{u}(p_i s_i) \gamma^\mu A_\mu u(p_i s_i)]^* [\bar{u}(p_i s_i) \gamma^\nu B_\nu u(p_i s_i)] = \text{Sp} \left[\frac{\not{p}_i + m c}{2 m c} \bar{\gamma}^\mu A_\mu^* \frac{\not{p}_i + m c}{2 m c} \gamma^\nu B_\nu \right] \quad (5.36)$$

$$= \frac{1}{m^2 c^2} [(\underline{p}_i \cdot \underline{A}^*)(\underline{p}_i \cdot \underline{B}) + (\underline{p}_i \cdot \underline{B})(\underline{p}_i \cdot \underline{A}^*) + \frac{1}{2} (g)^2 \underline{A}^* \underline{B}]$$

ergibt sich mit $A_\mu = \{Y_{j-H_f}(\hat{k}), \vec{0}\}$; $B_\mu = \{Y_{j-H_f}(\hat{k}), \vec{0}\}$ beim ersten Summanden in (5.34), $A_\mu = \{Y_{j-H_f}(\hat{k}), \vec{0}\}$; $B_\mu = \{0, \vec{Y}_{j-H_f}(\hat{k})\}$ beim zweiten etc.:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu H_f s_i s_i} |H_i|^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} \left(\frac{2\Delta E}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu j^0} [2j+1]^{-1} \sum_{H_f} \left\{ \frac{(q)^4}{q^4} \frac{1}{m^2 c^2} \left[2 \frac{E_i E_f}{c} + \frac{1}{2} (q)^2 \right] Y_{j-H_f}^* Y_{j-H_f} M_{(c)}^{\nu} \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{m^2 c^2} [(\vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f}^*)(\vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f}) + (\vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f})(\vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f}^*) + \frac{1}{2} (q)^2 (\hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f}^*)(\hat{k} \times \vec{Y}_{j-H_f})] T_{(e)}^{\nu}]^2$$

$$+ \frac{1}{m^2 c^2} [(\vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j-H_f}^*)(\vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j-H_f}) + (\vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j-H_f})(\vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j-H_f}^*) + \frac{1}{2} (q)^2 (\vec{Y}_{j-H_f}^* \cdot \vec{Y}_{j-H_f})] T_{(m)}^{\nu}]^2. \quad (5.37)$$

Die Summation über M_f liefert schließlich für die geschweifte Klammer

$$\frac{2j+1}{4\pi} \frac{1}{m^2 c^2} \left\{ V_L(\theta) M_{(c)}^{\nu} + V_T(\theta) (T_{(e)}^{\nu})^2 + T_{(m)}^{\nu} \right\} \quad (5.38)$$

mit

$$V_L(\theta) = \frac{(q)^4}{q^4} \cdot 2 p_i p_f \cos^2 \theta/2 \quad (m \rightarrow 0) \quad (5.39)$$

und

$$V_T(\theta) = \frac{2 p_i p_f \sin^2 \theta/2}{q^2} [(p_i + p_f)^2 - 2 p_i p_f \cos^2 \theta/2] \quad (m \rightarrow 0) \quad (5.40)$$

$$= \left(-\frac{(q)^2}{2 q^2} + \tan^2 \theta/2 \right) \cdot 2 p_i p_f \cos^2 \theta/2 \quad (5.41)$$

Um die endgültige Formel für den Anregungsquerschnitt in das Einteilchenkontinuum zu erhalten, brauchen wir jetzt (5.37) unter Verwendung der Ausdrücke (5.38) bis (5.41) und Ausklammern des Faktors $2p_i p_f \cos^2 \vartheta_2$ in Gleichung (1.15) einzusetzen:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \frac{4\pi \sigma_{\text{Mott}}}{1 + \frac{E_f - E_i}{AMc^2} + \frac{2E_i}{AMc^2} \sin^2 \vartheta_2} \cdot \frac{2}{\pi \hbar} \times \quad (5.42)$$

$$\times \sum_{\nu} \left\{ \frac{(q)^{\nu}}{q^{\nu}} \sum_{J=0}^{\infty} M_{(cJ)}^{\nu}{}^2 + \left(-\frac{(q)^2}{2q^2} + \tan^2 \vartheta_2 \right) \sum_{J=1}^{\infty} (T_{(eJ)}^{\nu}{}^2 + T_{(mJ)}^{\nu}{}^2) \right\} ,$$

wo

$$\sigma_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \vartheta_2}{4k_i^2 \sin^4 \vartheta_2} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{ze^2}{\hbar c} ; \quad k_i = \frac{E_i}{\hbar c} .$$

Die vorliegende Form des Anregungsquerschnitts unterscheidet sich also von der herkömmlichen, für gebundene Zustände gedachten ⁶⁾ im Prinzip nur dadurch, daß noch zusätzlich über die verschiedenen Beiträge der Eigenkanäle ν summiert wird.

VI. Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, welche Aussagen die Eigenkanaltheorie über Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen machen kann, insbesondere, auf welche Weise charakteristische Größen wie Eigenphasen $\delta_{j\pi}^p$ und Eigenvektoren $V_c^{j\pi}$ in den Wirkungsquerschnitten eingehen. Dazu betrachten wir das Übergangsmatrixelement vom Grundzustand in einen Kontinuumszustand, der sich asymptotisch ($r_A \rightarrow \infty$) wie eine "auslaufende" ebene Nukleonewelle⁺),

$$\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}_A} |s_A m_s\rangle |L_A m_L^A\rangle \Phi_\alpha^\mu(\vec{r}_A) \quad (6.1)$$

also etwa denjenigen mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}_\alpha$ im Kanal α , verhält. $|s_A m_s\rangle$ soll den Spin des ausfallenden Nukleons und $\Phi_\alpha^\mu(r_A)$ die Wellenfunktion des Restkerns beschreiben. Das Betragsquadrat eines solchen Matrixelementes ergibt dann zusammen mit den Ausdrücken (1.15) und (1.16) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein aus Richtung $\vec{k}_i$ einfallendes Elektron von einem Kern in Richtung $\vec{k}_f$ gestreut wird, der seinerseits ein Nukleon in Richtung $\vec{k}_A$ emittiert. Unser erster Schritt besteht darin, die Eigenkanalfunktionen $\Psi_E^{j\pi}$ aus (4.15) so zu überlagern, daß sie die Eigenschaft (6.1) besitzen. Als Ergebnis finden wir (Anhang), daß ein Endzustand der Gestalt

$$|f\rangle = \frac{V_\alpha^{\frac{1}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi}{k_\alpha} \sum_{J M_f} \sum_{\ell_A J_A} \sum_{\nu} (-)^{J_A + M_f + \mu} i^{\ell_A} (j_A j_A \mu M_f \mu | J M_f) (\ell_A s_A M_f - \mu - m_s m_s | j_A M_f - \mu) \times Y_{\ell_A M_f - \mu - m_s}^{\ell_A}(\vec{k}_A) e^{i \delta_{j\pi}^p} V_{\alpha \ell_A j_A}^{j\pi} \Psi_E^{j\pi} \quad (6.2)$$

$|E J^\pi M_f \nu\rangle$

das oben geforderte asymptotische Verhalten hat. Bei der Summation über ℓ_A ist derjenige Zustand $\Psi_E^{j\pi}$ einzusetzen, der die Parität $\pi = (-)^{\ell_A + \ell_A}$ hat. Mit diesem Zustand bilden nun unter Verwendung der Definitionen des vorigen Kapitels in analoger Weise das Übergangsmatrixelement H_{fi} , dessen Betragsquadrat und die entsprechenden Spinsummen. Anstatt aber über alle Spinprojek-

+) In (6.1) haben wir der Kürze halber nur die für Neutronen richtige Form angegeben.

tionen des Compoundkerns zu summieren, müssen wir dasselbe jetzt sinngemäß mit denjenigen von Restkern und ausfallendem Nukleon, μ und m_s , tun. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{s_f s_i \\ \mu m_s}} |H_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^8} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{E_i E_f V} \frac{v_a}{V} \frac{(4\pi)^2}{k_a^2} \sum_{\substack{s_f s_i \\ \mu m_s}} \sum_{L'H'LH} \sum_{\substack{J'H_f' \\ \ell_f' j_f'}} \sum_{\substack{J H_f \\ \ell_a j_a}} (-i)^{J'+\ell_a'} i^{J+\ell_a} (-)^{j_a'+j_a} \frac{(-)^{2\mu}}{(-)^{2\mu}} \times$$

$$\times (j_a j_a' \mu H_f' - \mu | J H_f') (\ell_a' s_a H_f' \mu - m_s m_s | j_a' H_f' - \mu) Y_{\ell_a' H_f' - \mu - m_s}(\hat{k}_a) e^{-i\delta_{Jf'}} V_{\alpha \ell_a' j_a'}^{Jf'} \times$$

$$\times (j_a j_a \mu H_f - \mu | J H_f) (\ell_a s_a H_f - \mu - m_s m_s | j_a H_f - \mu) Y_{\ell_a H_f - \mu - m_s}^*(\hat{k}_a) e^{i\delta_{Jf'}} V_{\alpha \ell_a j_a}^{Jf} \times$$

$$\times \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^2}{q^2} Y_{L'H'}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f' v | M_{op}^{out} | 0 \rangle + i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{L'H'}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f' v | T_{op}^{el} | 0 \rangle - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{L'H'}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f' v | T_{op}^{mag} | 0 \rangle \right\}^* \quad (6.3)$$

$$\times \left\{ \Gamma^0 \frac{(q)^2}{q^2} Y_{L'H}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f v | M_{op}^{out} | 0 \rangle + i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{L'H}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f v | T_{op}^{el} | 0 \rangle - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{L'H}(\hat{k}) \langle E J^{\pi} H_f v | T_{op}^{mag} | 0 \rangle \right\} .$$

Das Ziel der nachfolgenden Umformungen ist es, die recht unhandliche rechte Seite von (6.3) zu vereinfachen und möglichst viele Spinsummen unmittelbar auszuführen. Zunächst gehen wir wie im vorigen Kapitel zu reduzierten Matrixelementen über und definieren:

$$\langle E J^{\pi} H_f v | M_{op}^{out} | 0 \rangle = \frac{\delta_{JL} \delta_{H_f H}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} \langle E J^{\pi} v | M_{op}^{out} | 0 \rangle \equiv \frac{\delta_{JL} \delta_{H_f H}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} M_{(cL)}^v, \quad (6.4)$$

$$\langle E J^{\pi} H_f v | T_{op}^{el} | 0 \rangle \equiv \frac{\delta_{JL} \delta_{H_f H}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} T_{(cL)}^v, \quad (6.5)$$

$$\langle E J^{\pi} H_f v | T_{op}^{mag} | 0 \rangle \equiv \frac{\delta_{JL} \delta_{H_f H}}{[2L+1]^{\frac{1}{2}}} T_{(mL)}^v, \quad (6.6)$$

wobei sich die linken Seiten dieser Definitionsgleichungen von den Matrixelementen (5.30) bis (5.32) um den Faktor $\cdot (2\Delta E / \pi \hbar)^{1/2}$ unterscheiden, da der asymptotische zur ebenen Welle zusammengesetzte Endzustand gemäß (6.1) hier im Volumen V auf 1 normiert

ist. Mit (6.4) bis (6.6) wird nach teilweise Ausmultiplizieren der geschweiften Klammern:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_f s_i \\ \mu m_s}} |H_{fi}|^2 &= -\frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^4 c^4}{E_i E_f V} \frac{\alpha_c}{V} \frac{(4\pi)^4}{k_a^2} \sum_{\substack{s_c s_i \\ \mu m_s}} \sum_{\substack{j' H_f' \\ \ell_a' j_a}} \sum_{\substack{j H_f \\ \ell_a j_a}} (-1)^{j' + \ell_a'} i^{j' + \ell_a} (-1)^{j + \ell_a} [(2j' + 1)(2j + 1)]^{-\frac{1}{2}} \\
 &\times (j_a j_a' \mu H_f' - \mu | j' H_f') (\ell_a' s_a H_f' - \mu - m_s, m_s | j_a' H_f - \mu) Y_{\ell_a' H_f' - \mu - m_s}(\hat{k}_a) e^{-i\delta_{p'}^{j'}} V_{\alpha \ell_a' j_a'}^{j' m' j'} \times \\
 &\times (j_a j_a' \mu H_f - \mu | j H_f) (\ell_a s_a H_f - \mu - m_s, m_s | j_a H_f - \mu) Y_{\ell_a H_f - \mu - m_s}(\hat{k}_a) e^{i\delta_m^j} V_{\alpha \ell_a j_a}^{j m j} \times \\
 &\left[\left(\frac{q}{q^2} \right)^2 \left\{ \Gamma^\circ Y_{j' H_f'}(\hat{k}) \cdot M_{(c j')}^{v'} \right\}^* \left\{ \Gamma^\circ \vec{Y}_{j H_f}(\hat{k}) M_{(c j)}^v \right\} \right. \\
 &+ \frac{(q)^2}{q^2} \left\{ \Gamma^\circ Y_{j' H_f'}(\hat{k}) M_{(c j')}^{v'} \right\}^* \left\{ i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(c j)}^v - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(m j)}^v \right\} \\
 &+ \left\{ i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(c j')}^{v'} - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(m j')}^{v'} \right\}^* \cdot \frac{(q)^2}{q^2} \left\{ \Gamma^\circ Y_{j H_f}(\hat{k}) M_{(c j)}^v \right\} \\
 &+ \left\{ i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(c j')}^v - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(m j')}^v \right\}^* \\
 &\left. \times \left\{ i \vec{\Gamma} \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(c j)}^v - i \vec{\Gamma} \cdot \vec{Y}_{j j' H_f}(\hat{k}) T_{(m j)}^v \right\} \right] .
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die von μ, m_s bzw. s_f, s_i abhängigen Glieder lassen sich unabhängig voneinander aufsummieren. Dabei ergibt die Summe über μ, m_s wegen der Kopplungsregel

$$Y_{\ell_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell} \left[\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (\ell_1 \ell_2 m_1 m_2 | \ell m_1 + m_2) (\ell_1 \ell_2 0 0 | \ell 0) Y_{\ell m_1 + m_2}(\vartheta, \varphi) \tag{6.8}$$

der Kugelfunktion und der Beziehung

$$\begin{aligned}
 &[(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 j_3 j_3 j_2 j_{22}) (j_1 j_{23} m_1 m - m_1 | j m) \\
 &= \sum_{m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_{12} m_1 + m_2) (j_{12} j_3 m_1 + m_2 m - m_2 | j m) (j_2 j_3 m_2 m - m_1 - m_2 | j_{22} m - m_1)
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

zwischen Racah- und Clebsch-Gordan-Koeffizienten ($s_A = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu m_s} (j_A j_A' \mu H_f - \mu | J H_f') (l_A' s_A H_f' - \mu - m_s m_s | j_A' H_f - \mu) Y_{l_A' H_f' - \mu - m_s}(\hat{k}_d) \times \\ & \times (j_A j_A' \mu H_f - \mu | J H_f) (l_A s_A H_f - \mu - m_s m_s | j_A H_f - \mu) Y_{l_A H_f - \mu - m_s}^*(\hat{k}_d) \\ & = - \sum_{\ell} (-)^{s_A + j_A + H_f} \left[\frac{(2j_A' + 1)(2j_A + 1)(2J + 1)(2J + 1)}{4\pi(2\ell + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times W(j_A' j_A J J; \ell j_A) (j_A' j_A \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \ell 0) (J J H_f' - H_f | \ell H_f' - H_f) Y_{\ell H_f' - H_f}(\hat{k}_d) . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nach Summation über $s_f s_i$ gemäß (5.36) können wir (6.7) schreiben in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_A s_i \\ \mu m_s}} |H_{fi}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(g)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 m^2 c^4}{E_i E_f V} \frac{v_\omega}{V} \frac{(4\pi)^2}{k_d^2} \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H_f' \\ j_A' j_A' \\ \nu' \nu}} \sum_{J H_f} (-)^{s_A + j_A + H_f'} (-i)^{J'} i^J (-)^{j_A' + j_A} \\ & \times e^{i(\delta_{J'}^{\nu'} - \delta_{J'}^{\nu} + \frac{\ell_A - \ell_A'}{2} \pi)} V_{\alpha \ell_A' j_A'}^{J' \nu'} V_{\alpha \ell_A j_A}^{J \nu} \left[\frac{(2j_A' + 1)(2j_A + 1)}{4\pi(2\ell + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times W(j_A' j_A J J; \ell j_A) (j_A' j_A \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \ell 0) (J J H_f' - H_f | \ell H_f' - H_f) Y_{\ell H_f' - H_f}(\hat{k}_d) \times \\ & \frac{1}{m^2 c^2} \left[\frac{(g)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i E_f}{c} + \frac{1}{2} (g)^2 \right) Y_{J' H_f'}^*(\hat{k}) Y_{J H_f}(\hat{k}) M_{(cJ')}^{\nu'} M_{(cJ)}^{\nu} \right. \\ & + \frac{(g)^2}{q^2} Y_{J' H_f'}^*(\hat{k}) M_{(cJ)}^{\nu'} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_f + \frac{E_f}{c} \vec{p}_i \right) \cdot i \{ \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(cJ)}^{\nu} - \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(mJ)}^{\nu} \} \\ & + \frac{(g)^2}{q^2} Y_{J H_f}(\hat{k}) M_{(cJ)}^{\nu} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_f + \frac{E_f}{c} \vec{p}_i \right) \cdot (-i) \{ \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(cJ')}^{\nu'} - \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(mJ')}^{\nu'} \} \\ & + \{ \vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(cJ')}^{\nu'} - \vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(mJ')}^{\nu'} \} \{ \vec{p}_f \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(cJ)}^{\nu} - \vec{p}_f \cdot \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(mJ)}^{\nu} \} \\ & + \{ \vec{p}_f \quad \quad \quad - \vec{p}_f \quad \quad \quad \} \{ \vec{p}_i \quad \quad \quad - \vec{p}_i \quad \quad \quad \} \\ & \left. + \frac{1}{2} (g)^2 \{ \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(cJ')}^{\nu'} - \vec{Y}_{JJ' H_f'}^*(\hat{k}) T_{(mJ')}^{\nu'} \} \{ \hat{k} \times \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(cJ)}^{\nu} - \vec{Y}_{JJ H_f}(\hat{k}) T_{(mJ)}^{\nu} \} \right] . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Um auch die Summation über die Projektionen M_f' und M_f der "Zwischendrehimpulse" J' und J auszuführen, wählen wir

ein spezielles Koordinatensystem; und zwar entsprechend Fig. 4 so, daß die z-Achse mit der Richtung der Impulsübertragung $\vec{q}$ übereinstimmt und die x-Achse in der durch $\vec{p}_f$ und $\vec{p}_i$ definierten Ebene liegt. Mit diesen Koordinaten brechen wegen $\hat{z} = \hat{q} = \hat{k}$ die Summen über M_f' und M_f ganz oder teilweise zusammen, denn es gilt:

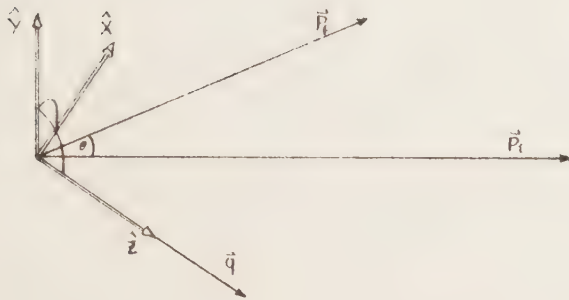


Fig. 4

$$Y_{J-M_f}(\hat{z}) = \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{M_f,0} \quad (6.12)$$

$$Y_{J-M_f}(\hat{z}) = \begin{cases} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (\hat{x} - i M_f \hat{y}) & \text{für } M_f = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\hat{k} \times Y_{J-M_f}(\hat{z}) = \begin{cases} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (\hat{y} + i M_f \hat{x}) & \text{für } M_f = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.14)$$

Damit die nun folgenden Gleichungen etwas einfacher geschrieben werden können, führen wir einige Abkürzungen ein:

$$e^{i\phi} = e^{i\{\delta_{J'}^y - \delta_{J'}^{y'} + (\ell_A - \ell_A' + J - J')\frac{\pi}{2}\}} = (-i)^{J'-J} e^{i(\delta_{J'}^y - \delta_{J'}^{y'} + \frac{\ell_A - \ell_A'}{2}\pi)} \quad (6.15)$$

$$g = (-)^{\ell_A' + J_A' + J_A} V_{\alpha \ell_A' J_A'}^{J_A' y'} V_{\alpha \ell_A J_A}^{J_A y} \left[\frac{(2J_A' + 1)(2J_A + 1)}{4\pi(\lambda + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} W(J_A' J_A J'; \ell J_A) (J_A' J_A \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \ell 0) \quad (6.16)$$

$$a = \frac{(q)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i}{c} \frac{E_f}{c} + \frac{1}{2} (q)^2 \right) Y_{j'-H_i'}^*(\hat{k}) Y_{j-H_i}(\hat{k}) M_{(cd')}^{\nu'} M_{(cd)}^{\nu} , \quad (6.17)$$

$$b_1 = \frac{(q)^2}{q^4} Y_{j'-H_i'}^*(\hat{k}) M_{(cd')}^{\nu'} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_f + \frac{E_f}{c} \vec{p}_i \right) \cdot i \left\{ \hat{k} \times \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} - \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu'} \right\} , \quad (6.18)$$

$$b_2 = \frac{(q)^2}{q^4} Y_{j-H_i}(\hat{k}) M_{(cd)}^{\nu} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_f + \frac{E_f}{c} \vec{p}_i \right) \cdot (-i) \left\{ \hat{k} \times \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} - \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu} \right\} , \quad (6.19)$$

$$c_1 = \left\{ \vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} - \vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} \right\} \left\{ \vec{p}_f \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} - \vec{p}_f \cdot \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} \right\} , \quad (6.20)$$

$$c_2 = \left\{ \vec{p}_f \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} - \vec{p}_f \cdot \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} \right\} \left\{ \vec{p}_i \cdot \hat{k} \times \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} - \vec{p}_i \cdot \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} \right\} , \quad (6.21)$$

$$d = \frac{1}{2} (q)^2 \left\{ \hat{k} \times \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} - \vec{Y}_{j'j'-H_i'}^*(\hat{k}) T_{(cd')}^{\nu'} \right\} \left\{ \hat{k} \times \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} - \vec{Y}_{jj-H_i}(\hat{k}) T_{(cd)}^{\nu} \right\} . \quad (6.22)$$

Mit diesen Abkürzungen hat (6.11) die Gestalt

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |H_{if}|^2 = - \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 c^2}{E_i E_f V} \frac{v_{\alpha}}{V} \frac{(4\pi)^2}{k_a^2} \sum_{\ell} \sum_{\substack{j' H_i' \\ \ell_a' j_a' \\ j'}} \sum_{\substack{j H_f \\ \ell_a j_a \\ \nu}} g \cdot e^{i\delta} \times \quad (6.23)$$

$$\times (-)^{H_i'} (j' j H_i' H_i | \ell H_i' - H_i) Y_{\ell H_i' - H_i}(\hat{k}_a) [a + b + c + d] ,$$

wo $b = b_1 + b_2$ und $c = c_1 + c_2$. Nun rechnen wir nacheinander die Summen über a, b, c und d in (6.23) aus.

1. Die Summe über a

Mit (6.17), (6.12) und

$$Y_{\ell 0}(\hat{k}_a) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell}^0(\cos \vartheta_a) \quad (6.24)$$

ergibt sich :

$$\sum_{M_f M_i} (-)^{M_f} (J' J M_f' - M_i | \ell M_f' - M_i) Y_{\ell M_f' - M_i}(\hat{k}_a) \cdot a \quad (6.25)$$

$$= \frac{(g)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i E_f}{c} + \frac{1}{2} (g)^2 \right) (J' J 0 0 | \ell 0) \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell}^0(\cos \theta_a) \left[\frac{2J'+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} M_{(cJ')}^{v'} M_{(cJ)}^v .$$

Vertauschen wir in (6.23) alle gestrichenen mit allen ungestrichenen Summationindizes, so gehen bei invarianter Gesamtsumme die einzelnen Summanden auf Grund von (6.15), (6.16) und (6.17) in ihr konjugiert Komplexes über ($e^{i\delta} \rightarrow e^{-i\delta}$; g und der Ausdruck (6.25) sind invariant):

$$\rightarrow \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' M_f' \\ \ell_a' j_a' \\ v'}} \sum_{\substack{J M_f \\ \ell_a j_a \\ v}} g e^{i\delta} (-)^{M_f} (J' J M_f' - M_i | \ell M_f' - M_i) Y_{\ell M_f' - M_i}(\hat{k}_a) \cdot a = \frac{(g)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i E_f}{c} + \frac{1}{2} (g)^2 \right) \times \quad (6.26)$$

$$\times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' M_f' \\ \ell_a' j_a' \\ v'}} \sum_{\substack{J M_f \\ \ell_a j_a \\ v}} g \cos \delta_{\ell} (J' J 0 0 | \ell 0) \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell}^0(\cos \theta_a) \left[\frac{2J'+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} M_{(cJ')}^{v'} M_{(cJ)}^v .$$

$$\left\{ \cos \left\{ \delta_{J' \ell_a' j_a' v'}^v - \delta_{J \ell_a j_a v}^v + (\ell_a \cdot \ell_a' + J \cdot J') \right\} \frac{\pi}{2} \right\} = \left(\cos(\delta_{J' \ell_a' j_a' v}^v - \delta_{J \ell_a j_a v}^v) \cdot (-1)^{\frac{\ell_a \cdot \ell_a' + J \cdot J'}{2}} \right)$$

2. Die Summe über b

Mit (6.12), (6.13) und den Ausdrücken (6.18) bzw. (6.19) für b_1 bzw. b_2 ergibt sich:

$$\sum_{M_f M_i} (-)^{M_f} (J' J M_f' - M_i | \ell M_f' - M_i) Y_{\ell M_f' - M_i}(\hat{k}_a) \cdot b_1$$

$$= - \frac{(g)^2}{q^2} M_{(cJ')}^{v'} \cdot i \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_i \cdot \hat{x} + \frac{E_f}{c} \vec{p}_f \cdot \hat{x} \right) \cdot \quad (6.28)$$

$$\times \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} (J' J 0 \mu | \ell \mu) Y_{\ell \mu}(\hat{k}_a) \{ T_{(mJ)}^v + i \mu T_{(eJ)}^v \} ,$$

$$\sum_{M_f M_i} (-)^{M_f} (J' J M_f' - M_i | \ell M_f' - M_i) Y_{\ell M_f' - M_i}(\hat{k}_a) \cdot b_2$$

$$= - \frac{(g)^2}{q^2} M_{(cJ)}^v \cdot (-i) \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_i \cdot \hat{x} + \frac{E_f}{c} \vec{p}_f \cdot \hat{x} \right) \times \quad (6.28)$$

$$\times \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} (J' J 0 \mu | \ell \mu) Y_{\ell \mu}^*(\hat{k}_a) \{ T_{(mJ')}^{v'} + i \mu T_{(eJ')}^{v'} \} .$$

Wir bilden nun die Summe (6.23) sowohl mit b_1 als auch mit b_2 . In der Summe über b_2 vertauschen wir alle gestrichenen mit allen ungestrichenen Indizes und erkennen, daß das allgemeine Glied aus der Summe über b_2 konjugiert komplex ist. zum entsprechenden Glied aus der Summe über b_1 . Damit ist also jeder Summand in der Summe (6.23) über b reell. Wir haben:

$$\sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H'_1 \\ \ell'_{\lambda} j'_{\lambda}}} \sum_{\substack{J H_1 \\ \ell_{\lambda} j_{\lambda}}} g e^{i\delta} (-)^{H'_1} (J') H'_1 - H_1 (\ell H'_1 - H_1) Y_{\ell H'_1 - H_1}(\hat{k}_a) [b_1 + b_2] = -\frac{(g)}{q^2} \left(\frac{E_i}{c} \hat{p}_i \cdot \hat{x} + \frac{E_f}{c} \hat{p}_f \cdot \hat{x} \right) \times$$

$$\times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H'_1 \\ \ell'_{\lambda} j'_{\lambda}}} \sum_{\substack{J H_1 \\ \ell_{\lambda} j_{\lambda}}} g M_{(cJ')}^{J'} \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} (J' J 0 \mu | \ell \mu) \times$$

$$\times \left[e^{i\delta} i Y_{\ell\mu}(\hat{k}) \{ T_{(mJ)}^{\nu} + i\mu T_{(eJ)}^{\nu} \} + e^{-i\delta} (-i) Y_{\ell\mu}^*(\hat{k}) \{ T_{(mJ)}^{\nu} - i\mu T_{(eJ)}^{\nu} \} \right] \quad (6.29)$$

Wegen der Beziehung

$$Y_{\ell\mu}(\hat{k}_a) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-\mu)!}{(\ell+\mu)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell}^{\mu}(\cos \vartheta_a) e^{i\mu\varphi_a}$$

$$= \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-\mu)!}{(\ell+\mu)!} \right]^{\frac{1}{2}} (-)^{\mu} \frac{(\ell+\mu)!}{(\ell-\mu)!} P_{\ell}^{-\mu}(\cos \vartheta_a) e^{i\mu\varphi_a} \quad (6.30)$$

zwischen Kugelfunktionen und zugeordneten Legendre'schen Funktionen und wegen

$$(J' J 0 \mu | \ell \mu) = (-)^{J'+J+\ell} (J' J 0 -\mu | \ell -\mu) \quad (6.31)$$

erhält man für die Summe über $\mu = \pm 1$:

$$\sum_{\mu=\pm 1} (J' J 0 \mu | \ell \mu) \left[e^{i\delta} i Y_{\ell\mu}(\hat{k}) \{ T_{(mJ)}^{\nu} + i\mu T_{(eJ)}^{\nu} \} + e^{-i\delta} (-i) Y_{\ell\mu}^*(\hat{k}) \{ T_{(mJ)}^{\nu} - i\mu T_{(eJ)}^{\nu} \} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} (J' J 0 1 | \ell 1) P_{\ell}^1(\cos \vartheta_a) \cdot \left[(\sin(\delta + \varphi_a) - (-)^{J'+J+\ell} \sin(\delta - \varphi_a)) T_{(mJ)}^{\nu} \right.$$

$$\left. + (\cos(\delta + \varphi_a) + (-)^{J'+J+\ell} \cos(\delta - \varphi_a)) T_{(eJ)}^{\nu} \right] \quad (6.32)$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\delta = \delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{V}} - \delta_{\mathcal{P}'}^{\mathcal{V}'} + (\ell_A - \ell_A' + J - J') \frac{\pi}{2} \quad (6.33)$$

und auf Grund der Auswahlregeln für die elektromagnetischen Übergänge gilt:

$$T_{(mJ)} = 0, \text{ wenn } [1 - (-)^{J+\ell_A+\ell_A'}] = 0, \quad (6.34)$$

$$T_{(eJ)} = 0, \text{ wenn } [1 + (-)^{J+\ell_A+\ell_A'}] = 0, \quad (6.35)$$

so können wir die eckige Klammer vereinfachen und schreiben:

$$\begin{aligned} & [(\sin(\delta + \varphi_A) - (-)^{J'+J+\ell} \sin(\delta - \varphi_A)) T_{(mJ)}^{\mathcal{V}} + (\cos(\delta + \varphi_A) + (-)^{J'+J+\ell} \cos(\delta - \varphi_A) T_{(eJ)}^{\mathcal{V}})] \\ & = 2 \cos(\delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{V}} - \delta_{\mathcal{P}'}^{\mathcal{V}'}) \left[(-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + 1}{2}} T_{(mJ)}^{\mathcal{V}} + (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} T_{(eJ)}^{\mathcal{V}} \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Mit (6.36), (6.32) und (6.29) erhalten wir schließlich für die gesamte Summe über b :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H_1' \\ \ell_1' J_1' \\ \mathcal{V}'}} \sum_{\substack{J H_2 \\ \ell_2 J_2 \\ \mathcal{V}}} g e^{i\delta} (-)^{H_1'} (J' J H_1' - H_2 | \ell H_1' - H_2) Y_{\ell H_1' - H_2}(\hat{u}) \cdot b = 2 \frac{(q)^2}{q^2} \left(\frac{E_1}{c} \vec{p}_1 \cdot \hat{x} + \frac{E_2}{c} \vec{p}_2 \cdot \hat{x} \right) \times \\ & \times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H_1' \\ \ell_1' J_1' \\ \mathcal{V}'}} \sum_{\substack{J H_2 \\ \ell_2 J_2 \\ \mathcal{V}}} g \cos(\delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{V}} - \delta_{\mathcal{P}'}^{\mathcal{V}'}) (J' J 0 1 | \ell 1) \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} P_{\ell}^1(\cos \vartheta_A) \left[\frac{(2J'+1)(2J+1)}{4\pi} \right] \times \\ & \times M_{(eJ')}^{\mathcal{V}'} \left[(-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + 1}{2}} T_{(mJ)}^{\mathcal{V}} + (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} T_{(eJ)}^{\mathcal{V}} \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

3. Die Summe über c

Mit (6.13), (6.14) und den Ausdrücken (6.18) bzw. (6.19) für c_1 bzw. c_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{H_i' H_i} (-)^{H_i'} (J' J H_i' - H_i | \ell H_i' - H_i) Y_{\ell H_i' - H_i}(\hat{k}_a) \cdot c_1 \\
 &= \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} (\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p}_i \cdot \hat{x}) \sum_{\substack{\mu=\pm 1 \\ \mu'=\pm 1}} (-)^{\mu'} (J' J \mu' - \mu | \ell \mu' - \mu) Y_{\ell \mu' - \mu}(\hat{k}_a) \times \\
 & \times \{ T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + \mu' \mu T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v + i \mu' T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v - i \mu T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v \}, \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{H_i' H_i} (-)^{H_i'} (J' J H_i' - H_i | \ell H_i' - H_i) Y_{\ell H_i' - H_i}(\hat{k}_a) \cdot c_2 \\
 &= \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} (\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p}_i \cdot \hat{x}) \sum_{\substack{\mu=\pm 1 \\ \mu'=\pm 1}} (-)^{\mu} (J' J \mu - \mu' | \ell \mu - \mu') Y_{\ell \mu - \mu'}(\hat{k}_a) \times \\
 & \times \{ T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + \mu \mu' T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v - i \mu' T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + i \mu T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v \}. \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Wir bilden wieder (wie bei der Summation über b) die Summe (6.23) sowohl mit c_1 als auch mit c_2 . In der Summe über c_2 vertauschen wir alle gestrichenen mit allen ungestrichenen Indizes. Das allgemeine Glied aus der Summe über c_2 ist dann konjugiert komplex zum entsprechenden Glied aus der Summe über c_1 . Also ist jeder Summand der Summe (6.23) über b reell. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H_i' \\ \ell_i' J_i'}} \sum_{\substack{J H_i \\ \ell_i J_i}} g e^{i\delta} (J' J H_i' - H_i | \ell H_i' - H_i) Y_{\ell H_i' - H_i}(\hat{k}_a) [c_1 + c_2] = \frac{1}{4} (\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p}_i \cdot \hat{x}) \times \\
 & \times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H_i' \\ \ell_i' J_i'}} \sum_{\substack{J H_i \\ \ell_i J_i}} g \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \sum_{\substack{\mu=\pm 1 \\ \mu'=\pm 1}} (-)^{\mu'} (J' J \mu' - \mu | \ell \mu' - \mu) \cdot 2 \operatorname{Re} [e^{i\delta} Y_{\ell \mu' - \mu}(\hat{k}_a) \times \\
 & \times \{ T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + \mu' \mu T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v + i \mu' T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - i \mu T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v \}]. \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (6.30) und (6.31) können wir die Summen über $\mu' = \pm 1, \mu = \pm 1$ ausführen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\mu=\frac{1}{2}A \\ \mu'=\frac{1}{2}A}} (-)^{J'J\mu'-\mu|\ell\mu'\mu} \cdot 2 \operatorname{Re} [e^{i\delta} Y_{\ell\mu'-\mu}(\hat{k}) \{ T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + \mu'\mu T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu} + i\mu' T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - i\mu T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu} \}] \\
 &= -2 \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (J'J\ell-1|\ell 0) P_{\ell}^0(\cos \vartheta_{\alpha}) [\cos \delta (1+\epsilon)^{J+J'+\ell} (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \\
 &\quad - \sin \delta (1-\epsilon)^{J+J'+\ell} (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu})] \\
 &= -2 \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} [(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} (J'J\ell 1|\ell 2) P_{\ell}^2(\cos \vartheta_{\alpha}) \times \\
 &\quad \times \left[(\cos(\delta+2\varphi_{\alpha}) + (-)^{J+J'+\ell} \cos(\delta-2\varphi_{\alpha})) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (\sin(\delta+2\varphi_{\alpha}) - (-)^{J+J'+\ell} \sin(\delta-2\varphi_{\alpha})) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right] .
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Die eckigen Klammern in (6.38) können wir wieder mit Hilfe der Auswahlregeln (6.34) und (6.35) vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 & [\cos \delta (1+(-)^{J+J'+\ell}) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) - \sin \delta (1-(-)^{J+J'+\ell}) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu})] \\
 &= 2 \cos(\delta_{J''}^{\nu} - \delta_{J'''}^{\nu'}) \left[(-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + A}{2}} (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right] ,
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
 & [(\cos(\delta+2\varphi_{\alpha}) + (-)^{J+J'+\ell} \cos(\delta-2\varphi_{\alpha})) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \\
 &\quad - (\sin(\delta+2\varphi_{\alpha}) - (-)^{J+J'+\ell} \sin(\delta-2\varphi_{\alpha})) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu})] \\
 &= 2 \cos(\delta_{J''}^{\nu} - \delta_{J'''}^{\nu'}) \cos 2\varphi_{\alpha} \left[(-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + A}{2}} (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right] .
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Für die gesamte Summe über c erhalten wir nach Einsetzen der Beziehungen (6.43), (6.44) und (6.41) in (6.40) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H'_i \\ \ell'_i j'_i \\ v'}} \sum_{\substack{J H_i \\ \ell_i j_i \\ v}} g e^{i\delta} (-)^{H'_i} (J' J H'_i - H_i | \ell H'_i - H_i) Y_{\ell H'_i - H_i}(\hat{k}_a) \cdot C = -(\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p}_i \cdot \hat{x}) \times \\
 & \times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' v' \\ \ell'_i j'_i}} \sum_{\substack{J v \\ \ell_i j_i}} g \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\delta_{J'}^v - \delta_{J''}^{v'}) \times \\
 & \times \left\{ \begin{aligned} & (J' J 1-1 | \ell 0) P_{\ell}^0(\cos \lambda_a) \left[(-)^{\frac{\ell'_i - \ell_i + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + T_{(eJ')}^v T_{(eJ)}^v) \right. \\ & \quad \left. - (-)^{\frac{\ell'_i - \ell_i + J' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right] \\ & + \cos 2\varphi_a [(l-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{-\frac{1}{2}} (J' J 11 | \ell 2) P_{\ell}^2(\cos \lambda_a) \left[(-)^{\frac{\ell'_i - \ell_i + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right. \\ & \quad \left. - (-)^{\frac{\ell'_i - \ell_i + J' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right] \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

4. Die Summe über d

Mit (6.13), (6.14) und dem Ausdruck (6.22) für d wird

$$\begin{aligned}
 & \sum_{H'_i H_i} (-)^{H'_i} (J' J H'_i - H_i | \ell H'_i - H_i) Y_{\ell H'_i - H_i}(\hat{k}_a) \cdot d \\
 & = \frac{1}{2} (1)^2 \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\substack{\mu = \pm 1 \\ \mu' = \pm 1}} (-)^{\mu'} (J' J \mu' - \mu | \ell \mu' - \mu) Y_{\ell \mu' - \mu}(\hat{k}_a) \times \\
 & \times \left\{ (1+\mu'\mu) (T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + T_{(eJ')}^{v'}) + i(\mu' + \mu) (T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Bei Betrachtung der gesamten Summe (6.23) über d, erkennen wir, daß jeder Summand bei Vertauschung der gestrichenen Indizes mit den ungestrichenen in sein konjugiert Komplexes übergeht. Da sich der Wert der Summe bei dieser Vertauschung nicht ändert, bleibt er auch derselbe, wenn man zu jedem Summand das konjugiert Komplexe addiert und die ganze Summe durch 2 dividiert. Wir brauchen also nur über die Realteile

zu summieren:

$$\sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H' \\ \ell_A' \ell_B' \\ y'}} \sum_{\substack{J H \\ \ell_A \ell_B \\ y}} g e^{i\delta} (-)^{H'} (J' J H' - H' | \ell H' H') Y_{\ell H' H'}(\hat{k}_a) \cdot d = \frac{1}{2} (g)^2 x \quad (6.46)$$

$$\times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' y' \\ \ell_A' \ell_B'}} \sum_{\substack{J y \\ \ell_A \ell_B}} g \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\substack{\mu=\pm 1 \\ \mu'=\pm 1}} (-)^{\mu'} (J' J \mu' - \mu | \ell \mu' \mu) \cdot \text{Re} [e^{i\delta} Y_{\ell \mu' \mu}(\hat{k}_a) \times$$

$$\times \{ (1+\mu' \mu) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) + i(\mu' + \mu) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \}].$$

Wir führen wieder mit Hilfe von (6.30) und (6.31) die Summen über $\mu = \pm 1$ und $\mu' = \pm 1$ aus:

$$\sum_{\substack{\mu'=\pm 1 \\ \mu=\pm 1}} (-)^{\mu'} (J' J \mu' - \mu | \ell \mu' \mu) \text{Re} [e^{i\delta} Y_{\ell \mu' \mu}(\hat{k}_a) \{ (1+\mu' \mu) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu})$$

$$+ i(\mu' + \mu) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \}]. \quad (6.47)$$

$$= -2 \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (J' J 1 - 1 | \ell 0) P_{\ell}^0(\cos \alpha_a) \{ \cos \delta (1 + (-)^{J'+J+\ell}) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu})$$

$$- \sin \delta (1 - (-)^{J'+J+\ell}) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \}.$$

Wegen der Auswahlregeln ist aber

$$\{ \cos \delta (1 + (-)^{J'+J+\ell}) (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) - \sin \delta (1 - (-)^{J'+J+\ell}) (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \} \quad (6.48)$$

$$= 2 \cos(\delta_{J''}^{\nu} - \delta_{J'''}^{\nu'}) \cdot \left\{ (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) - (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right\}$$

und damit

$$\sum_{\ell} \sum_{\substack{J' H' \\ \ell_A' \ell_B' \\ y'}} \sum_{\substack{J H \\ \ell_A \ell_B \\ y}} g e^{i\delta} (-)^{H'} (J' J H' - H' | \ell H' H') Y_{\ell H' H'}(\hat{k}_a) \cdot d = \frac{1}{2} (g)^2 x \quad (6.49)$$

$$\times \sum_{\ell} \sum_{\substack{J' y' \\ \ell_A' \ell_B'}} \sum_{\substack{J y \\ \ell_A \ell_B}} g \frac{[(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\delta_{J''}^{\nu} - \delta_{J'''}^{\nu'})$$

$$\times \left\{ (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} + T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) - (-)^{\frac{\ell_A' - \ell_A + J' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{\nu'} T_{(mJ)}^{\nu} - T_{(mJ')}^{\nu'} T_{(eJ)}^{\nu}) \right\}.$$

Nachdem wir nun alle Summen über die Projektionen M_F der Zwischendrehimpulse explizit berechnet haben, addieren wir die Ergebnisse (6.26), (6.37), (6.44) und (6.49) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell} \sum_{\substack{J_1' H_1' \\ \ell_1' j_1' \\ p'}} \sum_{\substack{J_2 H_2 \\ \ell_2 j_2 \\ v}} g \cdot e^{i\delta} (-)^{H_1'} (J_1' H_1' - H_2 | \ell H_2 - H_2) Y_{\ell H_2 - H_2}(\hat{k}_2) [a + b + c + d] \\ &= \sum_{\ell} \sum_{\substack{J_1' H_1' \\ \ell_1' j_1' \\ \ell_2 j_2}} \sum_{J_2 v} V_{\alpha \ell_1' j_1'}^{J_1' H_1'} V_{\alpha \ell_2 j_2}^{J_2 v} \cos(\delta_{J_1'} - \delta_{J_2}) \frac{[(2j_1'+1)(2j_2+1)(2J+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^2} \times \\ & \times (-)^{S_1+j_1+j_1'+j_2} W(j_1' j_2 J J_1 j_2) (j_1' j_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \ell 0) \times \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \begin{aligned} & P_e^0(\cos \vartheta_2) \left[\frac{(g)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_1}{c} \frac{E_2}{c} + \frac{1}{2} (g)^4 (J_1' 0 0 | \ell 0) (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J}{2}} M_{(cJ')}^{v'} M_{(cJ)}^v \right. \right. \\ & \quad - \left((\vec{p}_1 \hat{x})(\vec{p}_2 \hat{x}) + \frac{1}{2} (g)^4 (J_1' 1 - 1 | \ell 0) \left\{ (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right\} \right] \\ & + P_e^1(\cos \vartheta_2) \cos \varphi_2 \cdot 2 \frac{(q)^4}{q^4} \left(\frac{E_1}{c} \vec{p}_1 \hat{x} + \frac{E_2}{c} \vec{p}_2 \hat{x} \right) (J_1' 0 1 | \ell 1) [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left\{ (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J + 1}{2}} M_{(cJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J}{2}} M_{(cJ')}^v T_{(eJ)}^v \right\} \\ & - P_e^2(\cos \vartheta_2) \cos 2\varphi_2 (\vec{p}_1 \hat{x})(\vec{p}_2 \hat{x}) (J_1' 1 1 | \ell 2) [\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left\{ (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J}{2}} (T_{(mJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v - T_{(eJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) - (-)^{\frac{\ell_1' - \ell_2 + J_1' - J + 1}{2}} (T_{(eJ')}^{v'} T_{(mJ)}^v + T_{(mJ')}^{v'} T_{(eJ)}^v) \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Abkürzung (6.16) für g wieder rückgängig gemacht. Die Phasenfaktoren vor den reduzierten Matrixelementen können wir zum Verschwinden bringen, indem wir definieren:

$$M_{(cJ)}^v = (-)^{\frac{J+\ell_2+\ell_1}{2}} \widetilde{M}_{(cJ)}^v, \quad (6.51)$$

$$T_{(eJ)}^v = (-)^{\frac{J+\ell_2+\ell_1}{2}} \widetilde{T}_{(eJ)}^v, \quad (6.52)$$

$$T_{(mJ)}^v = (-)^{\frac{J+\ell_2+\ell_1}{2}} \widetilde{T}_{(mJ)}^v. \quad (6.53)$$

Mit den Matrixelementen $\tilde{M}_{(e)}^{\nu}$, $\tilde{T}_{(e)}^{\nu}$ und $\tilde{T}_{(m)}^{\nu}$ ergibt sich schließlich aus (6.50) und (6.23) für die gesamte Wechselwirkungsenergie:

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i s_i'} |H_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^4}{(q)^4} \frac{(4\pi)^4 e^4 c^2}{E_i E_f V_0^2} \frac{V_0}{V_N k_A^2} \sum_{\ell} \sum_{j_1' j_1'} \sum_{j_2' j_2} V_{\alpha \ell j_1'}^{j_1' j_1'} V_{\alpha \ell j_2}^{j_2' j_2} \cos(\delta_{j_1'}^{\nu} - \delta_{j_2}^{\nu}) \times \quad (6.54)$$

$$\times [(2j_1'+1)(2j_2+1)(2j_1'+1)(2j_2+1)]^{\frac{1}{2}} (-)^{s_1+j_1'+j_2'+j_2} W(j_1' j_2 j_1 j_2; \ell j_0) [j_1' j_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \ell 0] \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & P_e^0(\cos \vartheta_e) \left[\frac{(q)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i}{c} \frac{E_f}{c} + \frac{1}{2} (q)^2 \right) (j_1' 0 0 | \ell 0) \tilde{M}_{(e)}^{\nu'} \tilde{M}_{(e)}^{\nu} \right. \\ & \quad \left. - \left((\vec{p}_i \hat{x})(\vec{p}_f \hat{x}) + \frac{1}{2} (q)^2 \right) (j_1' 1 -1 | \ell 0) \left\{ \tilde{T}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(e)}^{\nu} + \tilde{T}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(m)}^{\nu} + \tilde{T}_{(m)}^{\nu'} \tilde{T}_{(e)}^{\nu} + \tilde{T}_{(m)}^{\nu'} \tilde{T}_{(m)}^{\nu} \right\} \right] \\ & - 2 P_e^1(\cos \vartheta_e) \cos \varphi_e \frac{(q)^2}{q^2} \left(\frac{E_i}{c} \vec{p}_i \hat{x} + \frac{E_f}{c} \vec{p}_f \hat{x} \right) (j_1' 0 1 | \ell 1) [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} \left\{ \tilde{M}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(e)}^{\nu} + \tilde{M}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(m)}^{\nu} \right\} \\ & + P_e^2(\cos \vartheta_e) \cos 2\varphi_e (\vec{p}_i \hat{x})(\vec{p}_f \hat{x}) (j_1' 1 1 | \ell 0) [\ell(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left\{ \tilde{T}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(e)}^{\nu} - \tilde{T}_{(e)}^{\nu'} \tilde{T}_{(m)}^{\nu} + \tilde{T}_{(m)}^{\nu'} \tilde{T}_{(e)}^{\nu} - \tilde{T}_{(m)}^{\nu'} \tilde{T}_{(m)}^{\nu} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Bevor wir (6.54) in die Formel (1.15) für den Wirkungsquerschnitt einsetzen, gehen wir bei den kinematischen Faktoren, die den Elektronenstreuwinkel enthalten, zum ultrarelativistischen Grenzfall ($m_e \rightarrow 0$) über:

$$\frac{(q)^4}{q^4} \left(2 \frac{E_i}{c} \frac{E_f}{c} + \frac{1}{2} (q)^2 \right) \xrightarrow{m \rightarrow 0} 2 p_i p_f \cos^2 \vartheta_2 \frac{(q)^4}{q^4}, \quad (6.55)$$

$$(\vec{p}_i \hat{x})(\vec{p}_f \hat{x}) + \frac{1}{2} (q)^2 \xrightarrow{m \rightarrow 0} 2 p_i p_f \cos^2 \vartheta_2 \left(-\frac{(q)^2}{2 q^2} + \tan^2 \vartheta_2 \right), \quad (6.56)$$

$$\frac{E_i}{c} (\vec{p}_i \hat{x}) + \frac{E_f}{c} (\vec{p}_f \hat{x}) \xrightarrow{m \rightarrow 0} 2 p_i p_f \cos^2 \vartheta_2 \frac{p_i + p_f}{q} \tan \vartheta_2, \quad (6.57)$$

$$(\vec{p}_i \hat{x})(\vec{p}_f \hat{x}) \xrightarrow{m \rightarrow 0} 2 p_i p_f \cos^2 \vartheta_2 \cdot 2 \frac{p_i p_f}{q^2} \sin^2 \vartheta_2, \quad (6.58)$$

Damit und unter Berücksichtigung von

$$(q)^2 \xrightarrow{m \rightarrow 0} -4 p_i p_e \sin^2 \theta_2 \quad (6.59)$$

können wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Elektron-Nukleon-Koinzidenzen bei Elektrodintegration des Typs (e,e'p) bzw. (e,e'n) schreiben in seiner endgültigen Form :

$$\frac{d^4\sigma}{d\Omega_e dE_e d\Omega_{e'} dE_{e'}} = \sigma_{\text{Mott}} \cdot \delta(E_i - E_f - E^* - \frac{q^2}{2M}) \cdot \frac{2}{\pi\hbar} \sum_{\ell} \sum_{j_1' j_1} \sum_{j_2' j_2} V_{n_e \ell_e j_{e'} m_{e'} \ell_{e'} j_{e'}}^{j_1' j_1'} V_{n_e \ell_e j_e m_e \ell_e j_e}^{j_2' j_2} \cos(\delta_{j_1'}^{j_1'} - \delta_{j_2'}^{j_2}) \times$$

$$\times [(2j_1'+1)(2j_2'+1)(2j_1+1)(2j_2+1)]^{\frac{1}{2}} (-)^{3e+j_e+j_1'+j_2'} W(j_1' j_2' j_1 j_2; \ell_e j_e) (j_1' j_2' \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \ell_e) \times \quad (6.60)$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & P_e^0(\cos \vartheta_e) \left[\frac{(q)^0}{q^0} (j_1' 0 0 | \ell_e) \tilde{M}_{(e j_1')}^{j_1'} \tilde{M}_{(e j_2')}^{j_2'} - \left(-\frac{(q)^2}{2q^2} + \tan^2 \theta_2 \right) \{ \tilde{T}_{(e j_1')}^{j_1'} + \tilde{T}_{(m j_1')}^{j_1'} \} \{ \tilde{T}_{(e j_2')}^{j_2'} + \tilde{T}_{(m j_2')}^{j_2'} \} \right] \\ & - 2 P_e^1(\cos \vartheta_e) \cos \varphi_e \frac{p_i + p_e}{q} \tan^2 \theta_2 (j_1' 0 1 | \ell_e) [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} \tilde{M}_{(e j_1')}^{j_1'} \{ \tilde{T}_{(e j_2')}^{j_2'} + \tilde{T}_{(m j_2')}^{j_2'} \} \\ & + P_e^2(\cos \vartheta_e) \cos 2\varphi_e \frac{p_i p_e}{q^2} \sin^2 \theta_2 (j_1' 1 1 | \ell_e) [\ell(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} \{ \tilde{T}_{(e j_1')}^{j_1'} + \tilde{T}_{(m j_1')}^{j_1'} \} \{ \tilde{T}_{(e j_2')}^{j_2'} - \tilde{T}_{(m j_2')}^{j_2'} \} \end{aligned} \right\},$$

wo

$$\sigma_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta_2}{4 k_i^2 \sin^4 \theta_2} ; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} ; \quad k_i = \frac{E_i}{\hbar c} ; \quad E^* = E_e + Q_e .$$

VII. Numerische Rechnungen und Ergebnisse

Zum Abschluß wollen wir anhand von Beispielen einiger Anregungsquerschnitte zeigen, daß die Eigenkanaltheorie nicht nur in der Lage ist, wesentliche Züge der γ -Querschnitte zu beschreiben, sondern auch die detaillierteren Anregungsquerschnitte der Elektronenstreuung. Als Modellkern bietet sich im Hinblick auf die hier verwendeten Näherungen vorzugsweise C^{12} an. Abgesehen davon zählt Kohlenstoff zu den Kernen, die solchen Experimenten am besten zugänglich sind.

A. Parameter des Kernmodells

Bevor wir jedoch die berechneten Anregungsquerschnitte diskutieren und mit Experimenten vergleichen, ist es angebracht, noch einen Überblick über die Parameter des Schalenmodells zu geben, mit denen die Kontinuumszustände (4.15) berechnet wurden⁺). Von Parametern abhängig sind in (4.15) die Radialanteile $u_{nlj}(r)/r$ der Einteilchenwellenfunktionen und die Teilchen-Loch-Amplituden $A_{nc}^{j,\nu}$. Die Funktionen $u_{nlj}(r)$ stellen Lösungen der aus einer Schrödingergleichung für ein Teilchen abseparierten Radialgleichung,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2M_{red}}{\hbar^2} \left[\epsilon - \frac{\ell(\ell+1)}{2M_{red}r^2} - V(r) \right] u = 0, \quad (7.1)$$

dar. Dabei bedeutet $V(r)$ ein reelles Saxon-Woods-Potential mit Spin-Bahn-Anteil und, im Falle von Protonen, zusätzlichem Coulombanteil. Mit einer homogenen Ladungsverteilung im Kern wird für Protonen:

$$V(r) = V_c \left[g(r) - \gamma \left(\frac{\hbar}{2M_c} \right)^2 (\vec{l} \cdot \vec{\sigma}) \frac{1}{r} \frac{dg(r)}{dr} \right] + V_{coul}, \quad (7.2)$$

wo

$$g(r) = \left[1 + e^{(r-R_0)/t} \right]^{-1} \quad (7.3)$$

⁺) Näheres bei V. Gillet, N. Vinh Mau²⁶⁾ und H.G. Wahsweiler, W. Greiner, M. Danos²⁷⁾

die für das Saxon-Woods-Potential charakteristische Fermi-Verteilung und

$$V_{\text{Coul}} = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2R_0} \left[3 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] & r \leq R_0 \\ \frac{Ze^2}{r} & r \geq R_0 \end{cases} \quad (7.4)$$

das Potential im Feld einer homogen geladenen Kugel beschreibt. Hier bezeichnet $V_c < 0$ die Tiefe des Saxon-Woods-Potentials, γ die relative Stärke der Spin-Bahn-Kopplung, t die Oberflächendicke der Fermi-Verteilung, R_0 den Potentialradius und Z die Ladung des Restkerns. M_{red} bedeutet die reduzierte Masse des Systems Nukleon-Restkern. Hinsichtlich der Zahlenwerte wurde bei R_0 und t auf Daten der elastischen Elektronenstreuung zurückgegriffen. (Die Stärke der Spin-Bahn-Kraft entspricht analogen Rechnungen von B. Buck und A.D. Hill für O^{16}). Damit wurde V_c dann so bestimmt, daß die Eigenwerte ϵ von (7.1) die mit dem Niederenergiespektrum von C^{13} identifizierten Einteilchenniveaus des Neutrons in C^{12} reproduzierten sowie Neutronen- und Protonenschwelle:

$$R_0 = 2.3 \text{ fm}$$

$$t = 0.45 \text{ fm}$$

(7.5)

Neutron					Proton			
ℓ_s	$p_{3/2}$	$s_{1/2}$	$d_{3/2}$	$d_{5/2}$	$p_{3/2}$	$s_{1/2}$	$d_{3/2}$	$d_{5/2}$
$-V_c$	74.82	88.83	94.64	87.07	75.94	88.83	94.64	87.07
γ	23.2	40.42	40.42	41.02	22.9	40.42	40.42	41.02

Bei der Berechnung der Einteilchenfunktionen positiver Energie geht als weiterer Parameter die Nahtstelle a ("Matching-Radius") zwischen Innenraum- und Außenraumlösung (4.8) ein. Der Matching-Radius sollte so groß sein, daß die Ergebnisse einer späteren Diagonalisierung des Hamiltonoperators nicht mehr von a abhängen. In unserem Fall wurde der Wert

$$a = 11.7 \text{ fm}$$

(7.6)

als ausreichend angesehen. Mit diesen Daten liefert die Lösung

der Radialgleichung (7.1) ein Schema von Einteilchenniveaus, wie es etwa in Fig.5 gezeigt ist. Die Lage der Niveaus mit positiven Energien hängt dabei noch von der Wahl der Streuphase ab, während sie bei negativen Energien im wesentlichen bereits durch (7.5)

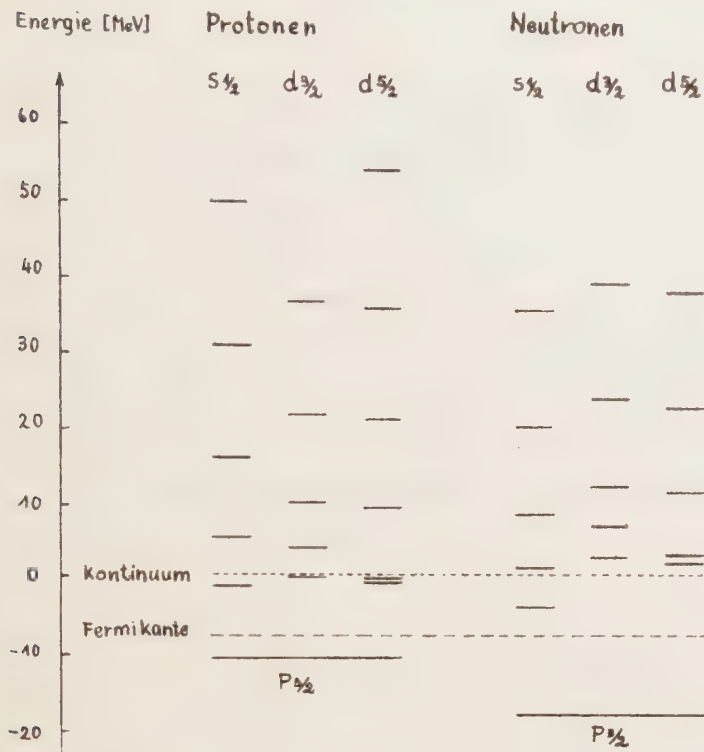


Fig. 5 (1^- , $E_r = 21.6 \text{ MeV}$, $\delta = 97^\circ$)

festliegt. Für Zustände unterhalb der Fermikante sind allerdings die exakten experimentellen Werte verwendet worden, um die beiden Einteilchenschwellen richtig zu reproduzieren. Entsprechend unserer Beschränkung auf 1-Teilchen-1-Loch-Zustände ist es sinnvoll, nur solche Einteilchenzustände zu gutem Gesamtdrehimpuls zu koppeln, die im Oszillatorbild benachbarten Schalen angehören. Die Parität eines so zusammengesetzten 1-Teilchen-1-Loch-Zustandes ist immer gut und wegen der aus benachbarten Oszillatorschalen stammenden Konstituenten negativ. Für den Gesamtdrehimpuls ergeben sich im vorliegenden Fall von C^{12} nur die Möglichkeiten, die aus der Kopplung eines Teilchens in der s-d-Schale mit einem Loch in der $p_{3/2}$ -Schale entsprechen. Im einzelnen sind das

$$\begin{aligned}
 & (s_{1/2} p_{3/2}^{-1}) \quad 1^-, 2^- \\
 & (d_{3/2} p_{3/2}^{-1}) \quad 1^-, 2^-, 3^- \\
 & (d_{5/2} p_{3/2}^{-1}) \quad 1^-, 2^-, 3^-, 4^- \quad ,
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

jeweils für Protonen und Neutronen. Diese Konfigurationen stellen bereits die Eigenzustände des Vielteilchen-Hamiltonoperators im "einfachen Schalenmodell" dar. Die verbesserte Version des Schalenmodells, wie sie zur Berechnung der Zustände (4.15) benutzt wurde ²⁶⁻²⁸⁾, fügt dem Hamiltonoperator noch den

Zweiteilchenoperator

$$V_{(1,2)} = V_0 \mathcal{J}(r_{12}) [a_0 + a_\sigma \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} + a_\tau \tau_{(1)} \cdot \tau_{(2)} + a_{\sigma\tau} \vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} \tau_{(1)} \cdot \tau_{(2)}] \quad (7.8)$$

hinzu, der das Potential einer effektiven im Innern des Kerns noch wirksamen Kraft zwischen zwei Nukleonen beschreiben soll. ("Restwechselwirkung"). Die Argumente 1,2 in (7.8) bedeuten einen vollständigen Satz von Koordinaten des ersten oder zweiten Teilchens und r_{12} den Abstand der Teilchen. V_0 stellt die Stärke und $\mathcal{J}(r_{12})$ die Radialabhängigkeit des Potentials dar, während die Parameter a_0, a_σ, a_τ und $a_{\sigma\tau}$ den von Spin- und Ladung unabhängigen Anteil sowie die Operatoren des Spin- und Ladungsaustausches nach Bedarf wichten. Unter der Annahme einer " δ -Kraft",

$$\mathcal{J}(r_{12}) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad , \quad (7.9)$$

ergibt sich für ein Matrixelement von $V(1,2)$ zwischen zwei Zuständen des Typs (7.7) der Ausdruck¹⁵⁾

$$\begin{aligned} V_{bB_j aA} &= V_0 \frac{(-1)^{\ell_A + \ell_B}}{4\pi} [(2\ell_a + 1)(2\ell_A + 1)(2\ell_b + 1)(2\ell_B + 1)(2j_a + 1)(2j_A + 1)(2j_b + 1)(2j_B + 1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{\lambda} (\ell_a \ell_A \ 00 | \lambda 0) (\ell_b \ell_B \ 00 | \lambda 0) \times \\ &\times [G_0^{m_a^* m_b^*} \frac{\delta_{\lambda 0}}{2(2j + 1)} W(j_A \frac{1}{2} j \ell_a; \ell_A j_a) W(j_B \frac{1}{2} j \ell_b; \ell_B j_b) \\ &+ G_1^{m_a^* m_b^*} 3 \cdot \left\{ \begin{matrix} \ell_a \frac{1}{2} j_a \\ \ell_A \frac{1}{2} j_A \\ \lambda \ 1 \ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell_b \frac{1}{2} j_b \\ \ell_B \frac{1}{2} j_B \\ \lambda \ 1 \ j \end{matrix} \right\}] \cdot \int_0^\infty u_a u_A u_b u_B \frac{dr}{r^2} . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Da hier mit einer "Austauschmischung" vom Meshkov-Soper-Typ¹⁵⁾

gerechnet wurde, d.h.,

$$a_0 = 0.865$$

$$a_\sigma = 0.135$$

$$a_\tau = a_{\sigma\tau} = 0 ,$$

(7.11)

denke man sich $G_0^{m_t^A m_t^B}$ und $G^{m_t^A m_t^B}$ durch

$$G_0^{m_t m_t'} = (2 - \delta_{m_t m_t'}) a_0 - 3 \delta_{m_t m_t'} a_\sigma ,$$

$$G^{m_t m_t'} = -\delta_{m_t m_t'} a_0 + (2 + \delta_{m_t m_t'}) a_\sigma$$

(7.12)

definiert.¹⁵⁾ Die Stärke V_0 der Restwechselwirkung war mit

$$V_0 = -500 \text{ MeV fm}^3$$

(7.13)

angesetzt.²⁸⁾ Damit haben wir alle physikalischen Parameter angegeben, welche die im Kontinuumszustand (4.14) vorkommenden Radialfunktionen $u_{n_A l_A j_A}(r)$, $u_{n_B l_B j_B}(r)$ und die verschiedenen Teilchen-Loch-Amplituden $A_{nc}^{j^{\pi\nu}}$ bestimmen. Die $A_{nc}^{j^{\pi\nu}}$ folgen aus der Diagonalisierung der Energiematrix

$$H_{bB_j aA} = [\epsilon_A - \epsilon_B] \delta_{ab} \delta_{AB} + V_{bB_j aA} .$$

(7.14)

Der Austauschterm wurde in (7.14) weggelassen, da er infolge der hier verwendeten δ -Kraft verschwindet.

B. Diskussion der berechneten Anregungsquerschnitte

Wir können uns nun der Darstellung und Diskussion einiger numerischer Ergebnisse⁺⁾ zuwenden. Zunächst werden wir anhand der Abhängigkeit von der Impulsübertragung $q = \hbar k^{++})$ auf den Kern den Einfluß des Kontinuums auf die Formfaktoren studieren. Daran wird sich eine Übersicht über das generelle Verhalten dieser Größen im Bereich von Anregungsenergien zwischen 16 und 30 MeV anschließen. Die Übersicht soll der Erklärung einiger Details in mehreren Anregungsspektren dienen. Diese Spektren wurden für einige kinematische Daten der jüngst in Saskatoon³⁰⁾ und Stanford³¹⁾ ausgeführten Experimente berechnet. An einigen Vergleichen zwischen theoretischen und experimentellen Wirkungsquerschnitten werden wir schließlich Grenzen und Möglichkeiten der vorliegenden Methode demonstrieren.

Zur Erläuterung des typischen Verhaltens der Formfaktoren für elektromagnetische Übergänge in das Eigenkanalkontinuum bedienen wir uns Fig. 6. Dort sind verschiedene transversale (Fig. 6a) und longitudinale (Fig. 6b) Formfaktoren gegen die Impulsübertragung k (Gl. (1.2)) aufgetragen, und zwar für das Maximum der Dipolriesenresonanzen bei 22.6 MeV Anregungsenergie. Jede der gestrichelt gezeichneten Kurven stellt den Formfaktor für den Übergang in einen der — entsprechend sechs offener Kanäle — sechs entarteten Eigenzustände $\psi_e^{j^{\pi\nu}}$ des Hamiltonoperators im Einteilchenkontinuum dar. Der gesamte Formfaktor für den 1^- -Zustand ist nach (5.38) gleich der Summe

$$\sum_{\nu=1}^6 M_{(e1)}^{\nu}{}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^6 T_{(e1)}^{\nu}{}^2 \quad (7.15)$$

der "partiellen" Formfaktoren über alle Eigenkanäle ν . Das Ergebnis finden wir jeweils durch eine ausgezogene Kurve

⁺⁾ Bei den numerischen Rechnungen wurden Teilchen-Loch-Amplituden und Einteilchenfunktionen aus den in²⁸⁾ geschilderten Rechnungen übernommen.

⁺⁺⁾ Im folgenden bezeichnen wir auch $k = \frac{q}{\hbar}$ mit Impulsübertragung.

dargestellt. Man erkennt, daß die sonst vertrauten Born'schen Minima durch die inkohärente Überlagerung (7.15) recht stark ausgeschmiert oder zum Teil gar nur angedeutet sind: als Folge der Entartung des Kernkontinuums⁹⁾. Vergleichbare Ausschmierungen lassen sich bei Rechnungen mit gebundenen Anregungszuständen nur vermöge zusätzlicher Manipulationen erreichen, zum Beispiel, Ersatz mehrerer Linien durch Lorentzkurven mit gefitteten Breiten oder auch Addition der Formfaktoren dieser Linien. Letzteres entspricht der Integration unseres Formfaktors über den betreffenden Energiebereich. Damit gelang es F.H. Lewis und J.D. Walecka³²⁾, den experimentellen Verlauf des transversalen Formfaktors mit dem bekannten Minimum bei $k \approx 0.3 \text{ fm}^{-1}$ ³³⁾ zu reproduzieren. Das ist auch bei unserem Formfaktor nach entsprechender Integration der Fall (Fig.13). Darüber hinaus besteht aber hier die Möglichkeit, den detaillierten Verlauf des nicht integrierten Formfaktors in Abhängigkeit von der Anregungsenergie zu studieren, der in Fig.8 aufgetragen ist. In dieser dreidimensionalen Darstellung zeigt es sich, daß Tiefe und Position des Minimums in der Umgebung der $d_{5/2}$ -Resonanz zwischen 20.2 und 24.5 MeV stark variieren. Die größte Tiefe von $3.5 \cdot 10^{-4}$ und der größte k -Wert von 0.6 fm^{-1} erscheint gerade bei 22.6 MeV, also in der Resonanz selbst. Außerhalb des erwähnten Bereichs deutet sich das Minimum nur noch in einer umgekehrten Krümmung an. Dieses Verhalten des transversalen 1^- -Formfaktors können wir aufgrund der Eigenschaften von Übergangstrom- und Magnetisierungsdichten erklären, wie das auch teilweise in³²⁾ geschehen ist. Nach den Gleichungen (5.23), (5.25) und (5.31) entsteht der transversale elektrische Formfaktor aus einer Überlagerung verschiedener interferierender Besseltransformierter, $F_{J+1}^\nu(k)$, $F_{J-1}^\nu(k)$ und $F_J^\sigma(k)$, derart, daß

$$T_{(eJ)}^\nu = F_{J+1}^\nu(k) + F_{J-1}^\nu(k) + F_J^\sigma(k) \quad (7.16)$$

mit

$$F_{J\pm 1}^\nu(k) = \int_0^{r_{\text{max}}} g_{J\pm 1}(r) j_{J\pm 1}(kr) dr \quad (7.17)$$

$$F_J^\sigma(k) = k \int_0^{r_{\text{max}}} \mu_J(r) j_J(kr) dr \quad (7.18)$$

und $\varrho_{J+1}(r)$ bzw. $\mu_J(r)$ als Übergangsstrom- bzw. Magnetisierungsdichte. Zur Veranschaulichung sind diese Größen in Fig. 7 graphisch dargestellt und zwar wieder bei 22.6 MeV, aber nur für die partiellen Formfaktoren, die charakteristisch sind. Die drei oberen Bilder zeigen die Übergangsdichten, die unteren die zugehörigen Besseltransformierten und den Formfaktor $T_{(eJ)}^{\gamma} (J^{\pi} = 1^{-})$. Zur Unterscheidung sind die Kurven mit den zugehörigen Eigenphasen kotiert. Als erstes vermerken wir, daß die Besseltransformierten $F_{J+1}^{\nu}(k)$ und $F_J^{\nu}(k)$ mit k gegen Null gehen, während $F_{J-1}^{\nu}(k)$ endlich bleibt und dort sogar ein Extremum hat. Dieses Verhalten erklärt sich aus dem Verlauf der verschiedenen Besselfunktionen bei kleinen k -Werten. Da alle sphärischen Besselfunktionen mindestens erster Ordnung für $k \rightarrow 0$ identisch verschwinden, hat die zugehörige Besseltransformierte bei $k=0$ den Wert Null. Anders verhält es sich hingegen bei Transformierten mit einer Besselfunktion nullter Ordnung, $j_0(kr)$, die bekanntlich für $k \rightarrow 0$ identisch gleich Eins wird. Wenn nun das Integral über die Dichte nicht gerade zufällig verschwindet, dann hat ihre Transformierte mit $j_0(kr)$ bei $k=0$ immer einen endlichen Wert. Weiter ergibt sich, daß ein Maximum oder Minimum vorliegt, wenn $\int_0^{r_{\max}} \varrho_0(r) r^2 dr \neq 0$ ist. Um das zu zeigen, entwickeln wir j_0 in eine Potenzreihe nach kr ,

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr} = 1 - \frac{(kr)^2}{6} \pm \dots \quad (7.19)$$

setzen dies in (7.17) für $J=1$ ein, berechnen damit die erste und die zweite Ableitung von $F_0^{\nu}(k)$ nach k und lassen k gegen Null gehen:

$$\frac{d}{dk} F_0^{\nu}(k) = \frac{d}{dk} \int_0^{r_{\max}} \varrho_0(r) \left[1 - \frac{(kr)^2}{6} \right] dr = - \frac{k}{6} \int_0^{r_{\max}} \varrho_0(r) r^2 dr \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (7.20)$$

$$\frac{d^2}{dk^2} F_0^{\nu}(k) = \frac{d}{dk} \left[- \frac{k}{6} \int_0^{r_{\max}} \varrho_0(r) r^2 dr \right] = - \frac{1}{6} \int_0^{r_{\max}} \varrho_0(r) r^2 dr \quad (7.21)$$

Diese Betrachtung führt also zu dem Schluß, daß von den transversalen Formfaktoren elektrischer Übergänge derjenige des E1-Übergangs als einziger bei $k=0$ von Null verschieden ist. Bei magnetischen Übergängen verschwinden jedoch alle Formfaktoren bei $k=0$, da das entsprechende Integral mit $\frac{1}{k}$, wie in (7.18) den Faktor k hat. Von den longitudinalen Formfaktoren bleibt derjenige des Monopolübergangs endlich⁺⁾ .

Nach dem wir das vom Normalfall abweichende Verhalten der Besseltransformierten $F_0^v(k)$ diskutiert haben, kehren wir wieder zu Fig.7 zurück. Man sieht jetzt leicht ein, daß es nur noch darauf ankommt, ob $F_0^v(k)$ oder $F_2^v(k) + F_4^s(k)$ überwiegt. Entsprechend vertritt der resultierende partielle Formfaktor mehr den Typ I oder mehr den Typ II. Auch die Gestaltsunterschiede des transversalen Formfaktors an der $d_{5/2}$ -Resonanz bei 22.6 MeV bzw. $d_{3/2}$ -Resonanz bei 24.5 MeV (Fig.6 und 8) lassen sich auf das bisher Gesagte zurückführen. Beim Vergleich der Teilchen-Loch-Amplituden, die in Fig.7 für die beiden Eigenphasen $\delta^{(u)}=97.1^\circ$ und $\delta^{(v)}=27.6^\circ$ angegeben sind, zeigt es sich, daß ein Überwiegen der $(d_{5/2} p_{3/2}^{-1})$ -Komponente im Kontinuumszustand ($\delta^{(u)}=97.1^\circ$) die Besseltransformierte $F_0^v(k)$ stärker begünstigt, während ein Überwiegen der $(d_{3/2} p_{3/2}^{-1})$ -Komponente ($\delta^{(v)}=27.6^\circ$) gerade das Gegenteil bewirkt. In diesem Sinne interpretieren wir auch die veränderte Gestalt des Formfaktors an der $p_{3/2}$ -Resonanz bei 24.5 MeV, die mehr dem Typ II entspricht, weil dort naturgemäß $(d_{3/2} p_{3/2}^{-1})$ -Zustände die größeren Amplituden besitzen. Solches Verhalten des Formfaktors bei 22.6 und 24.5 MeV bekräftigt die schon länger bekannte Aussage, daß die transversale Dipolstärke der 22.6-MeV-Resonanz zugunsten derjenigen bei 24.5 MeV mit wachsendem k abnimmt⁷⁾.

Bei den gerade vorangegangenen Überlegungen haben wir bereits begonnen, auch die Abhängigkeit des Formfaktors von der Anregungsenergie E mit einzuschließen. Wir fahren darin fort, indem wir das generelle Verhalten des transversalen und longitudinalen Formfaktors für die hier verfügbaren 1^- -, 2^- - und 3^- -

⁺⁾ vgl. entsprechende Bemerkung in 6)

Zustände diskutieren. Als Grundlage dazu mögen die Kurvenscharen in den Fig.8 bis 12 dienen, die den jeweiligen Formfaktor als Fläche über der k - E -Ebene darstellen. Um unsere Vorstellungen vom transversalen 1^- -Formfaktor zu ergänzen, verweilen wir zunächst bei Fig.8. In der Umgebung von 17.8 bis 18 MeV, die sich als $(2s_{1/2} p_{3/2})$ -Resonanz ausweist, zeigt uns die Gestalt des Formfaktors bei kleinen k an, daß die Besseltransformierte $F_0^p(k)$ hier offenbar nicht so wichtig ist, wie etwa bei 22.6 MeV. Verfolgt man den Verlauf der "Täler" und "Höhenrücken" in Fig.8, so ist ein allgemeiner Trend zu größeren k bei wachsender Anregungsenergie E nicht zu übersehen. Einen solchen Effekt sollte man auch erwarten, da ja die Wellenzahl des Nukleons im Kontinuum in etwa mit der Anregungsenergie wächst und damit auch die k -Werte maximalen und minimalen Überlapps zwischen Übergangsdichten und Besselfunktionen. Schließlich vermerken wir in Fig.8 die auffällig krassen Unterschiede in der Tiefe des zweiten Minimums ($k \approx 1.4$ bis 2.5 fm^{-1}). Die Ursache dafür sehen wir wesentlich im Grad der Entartung unserer Kontinuumszustände, der sich beim Passieren der Neutronenschwelle verdoppelt und damit die Wahrscheinlichkeit der Ausschmierung erhöht. Dieses und die anhand von Fig.8 diskutierten Merkmale kann man auch bei den anderen, in den Fig.2 bis 12 dargestellten Formfaktoren feststellen. In Fig.9 findet man darüber hinaus das erste Maximum des longitudinalen Formfaktors durchweg bei kleineren k als im transversalen Fall. Weiter sind hier die Born'schen Minima stärker ausgeschmied.

Fig.10 gibt einen Überblick über das Verhalten des (transversalen) Formfaktors für den magnetischen Quadrupolübergang in die 2^- -Kontinuumszustände. Dort fällt unterhalb 20 MeV besonders die stark ausgeprägte Struktur des Formfaktors auf. Zum großen Teil ist das auf die scharfen Resonanzen bei 16.7, 18.2, und 19.4 MeV zurückzuführen. Zusammen mit einer hier schlecht erkennbaren Resonanz bei 17.8 MeV sollte diejenige bei 16.7 MeV einem $T=0$ -Übergang entsprechen und diejenigen bei 18.2 und 19.4 MeV sowie die schwache Resonanz bei 23.0 MeV einem $T=1$ -Übergang²⁸⁾. Für die außerordentlich unterschiedliche k -Ab-

hängigkeit der Formfaktoren bei festem E ist bislang noch keine befriedigende Erklärung gefunden worden. Die Positionen der Maxima und Minima decken sich in etwa mit denen der transversalen 1^- -Formfaktoren. Im Hinblick auf die Größenordnungen bleibt zu erwähnen, daß die 2^- -Zustände mit wachsendem k generell wichtiger werden und ab $k \geq 1.5 \text{ fm}^{-1}$ mindestens gleich große Formfaktoren besitzen wie die 1^- -Zustände. Damit schließen wir unsere Diskussion von Fig.10 ab.

Wir wenden uns nun den 3^- -Formfaktoren zu (Fig.11 und 12). Hier liegt eine scharfe Resonanz bei 18.8 MeV, eine zweite bei 20.8 MeV und eine weitere, sehr breite bei 25.1 MeV. Die Zuordnung der Isospins sollte bei dieser Reihenfolge in der Weise $T=1,0,1$ erfolgen²⁸⁾. Die k -Abhängigkeit des Formfaktors zeichnet sich durch einen recht glatten Verlauf aus mit einem Maximum, das im transversalen Fall etwa zwischen $k=1.8$ und 2 fm^{-1} liegt und sich im longitudinalen Fall von $k \approx 0.6 \text{ fm}^{-1}$ bei 17 MeV bis nach 1.7 fm^{-1} bei 30 MeV verschiebt. Das bedeutet also, daß mit wachsender Impulsübertragung zunächst der longitudinale und dann der transversale Formfaktor überwiegt. Ähnlich verhalten sich auch die 1^- -Zustände. Mit zunehmenden Anregungsenergien verlieren diese Unterschiede jedoch an Bedeutung. Daß die Maxima hier bei größeren k liegen als bei 1^- -Zuständen (vgl. Fig.8) erscheint plausibel, weil zur Bildung des 3^- -Formfaktors Besselfunktionen höherer Ordnung benutzt werden, deren erste Nullstelle ein größeres Argument hat. Wie ein Vergleich der Größenordnungen zeigt, erreichen die 3^- -Formfaktoren die anderen (2^- und 3^-) bei etwa $k=1.6$ bis 1.7 fm^{-1} .

Zur Illustration dieser Verhältnisse mag auch Fig.13 dienen, wo die verschiedenen Formfaktoren, integriert von 20 bis 26 MeV, nebst deren Summe aufgetragen sind. In Fig.13a haben wir vergleichsweise Meßpunkte aus den 180° -Streuexperimenten von Goldemberg und Barber³³⁾ und Proca und Isabelle³⁴⁾ eingezeichnet. Wir erkennen, daß nicht sämtliche Züge des Formfaktors reproduziert werden. Relativ gute Übereinstimmung herrscht bei ganz kleinen k und in den Positionen von Minimum und Maximum. Andererseits ist das Minimum zu flach und der Gesamtformfaktor im Maximum zu groß. Eine Verbesserung ließe sich vielleicht durch

Berücksichtigung der $(p\frac{1}{2} s\frac{1}{2})$ -Konfiguration erreichen. Dies hätte aber den Nachteil, daß bei etwa 34 MeV eine Resonanz erschiene, die experimentell nicht gesehen wird.

Zum Abschluß wollen wir noch einen Eindruck von den Anregungsquerschnitten vermitteln, die aus den Formfaktoren der Fig.9 bis 12 resultieren. Dazu haben wir aus der Vielfalt der Möglichkeiten drei repräsentative Beispiele ausgewählt. Die kinematischen Daten, mit denen die Spektren berechnet wurden, entsprechen den jüngst in Saskatoon ³⁰⁾ und Stanford ³¹⁾ ausgeführten Experimenten und sind in der folgenden Tabelle angegeben.

E_1 [MeV]	θ [°]	$k_{\max}$	$k_{\min}$	Experiment	Graph. Darstellung in dieser Arbeit
71	155	0.62	0.56	Saskatoon 1968	Fig. 14, 15
131	135	1.14	1.08	Stanford 1969	Fig. 16, 17
275	135	2.45	2.39	Stanford 1969	Fig. 18, 19

Die Impulsübertragung k fällt mit wachsender Anregungsenergie monoton von $k_{\max}$ bis $k_{\min}$. Anhand der Fig.14 bis 19 werden wir nun die Spektren der Reihe nach erläutern. In Fig.14a sind der transversale und der longitudinale Formfaktor der 1^- -Zustände über der Anregungsenergie aufgetragen. Es zeigt sich recht eindrucksvoll, wie der transversale Formfaktor fast nur auf die d^- -Resonanz (24.5 MeV) der longitudinale nur auf die $d\frac{5}{2}$ -Resonanz (22.6 MeV) anspricht. An der $2s\frac{1}{2}$ -Resonanz (17.8 MeV) dagegen besitzen beide Formfaktoren ein gleichermaßen stark betontes Maximum. Schließlich vermerken wir, daß der longitudinale Formfaktor fast überall — zum Teil (21 bis 24 MeV) um mehr als einen Faktor 10 — größer ist als der transversale. Ein etwas anderes Verhalten geht aus dem analogen Diagramm mit $\theta = 0$ ("long wavelength limit") hervor, wo die Impulsübertragung ihren kleinstmöglichen Wert von etwa 0.1 fm^{-1} annimmt. Zwar hat der longitudinale Formfaktor dort praktisch die gleiche Gestalt wie in Fig.14a, nicht aber der transversale. Letzterer ist vielmehr dem longitudinalen Formfaktor proportional ⁶⁾, in diesem Fall etwa 1.4 mal größer. Darin zeigt sich wieder die bekannte Verschiebung der transversalen Dipolstärke von " $d\frac{5}{2}$ " nach " $d\frac{3}{2}$ ". Daß umgekehrt der longitudinale Formfaktor bei $k \approx 0.5 \text{ fm}^{-1}$ größer ist als der transversale, erscheint

uns im Sinne der früheren Betrachtungen plausibel: Zum einen setzt sich der transversale Formfaktor aus Besselformierten nullter bis zweiter Ordnung zusammen, die bei $k \approx 0.6 \text{ fm}^{-1}$ destruktiv interferieren können, zum anderen hat dieser hier noch ein Minimum, während der longitudinale Formfaktor bei $k \approx 0.7 \text{ fm}^{-1}$ ein Maximum hat. Nach Multiplikation der beiden Formfaktoren mit den entsprechenden kinematischen Größen aus Gl. (5.42) ergibt sich ein Anregungsquerschnitt, wie wir ihn in Fig.14b aufgetragen haben. Die $d_{3/2}$ -Resonanz tritt hier mehr hervor, weil der transversale Formfaktor in (5.42) bei Rückwärtswinkeln ($\theta = 155^\circ$) wesentlich stärker gewichtet wird als der longitudinale. Für die 2^- -Zustände finden wir die analogen Diagramme in Fig.14c und d, für die 3^- -Zustände in Fig.14e und f. In Fig.14e ist das Ausbleiben der 18.8 MeV-Resonanz beim transversalen Formfaktor zunächst verwunderlich, läßt sich jedoch durch einen Blick auf Fig.11 erklären. Dort sieht man nämlich, daß gerade innerhalb der Resonanz ein stärker ausgeprägtes Born'sches Minimum auftritt, und zwar etwa bei $k \approx 0.6 \text{ fm}^{-1}$, dem mittleren k-Wert der hier vorliegenden Kinetik. Allerdings ist dieser Effekt wegen der Kleinheit des gesamten 3^- -Anregungsquerschnitts gegenüber den anderen Querschnitten ohne jede Bedeutung. Das geht auch aus Fig.13a hervor, wo 1^- -, 2^- - und 3^- -Querschnitte im gleichen Maßstab aufgetragen sind, und die 3^- -Zustände praktisch keinen Beitrag liefern. Anders steht es mit den 1^- - und 2^- -Zuständen. Während die Struktur unterhalb 20 MeV im wesentlichen nur von den magnetischen Quadrupolübergängen geprägt ist, herrschen im Riesenresonanzbereich Dipolübergänge vor. Wir weisen aber darauf hin, daß die Beiträge der 1^- -Zustände unterhalb und der 2^- -Zustände oberhalb 20 MeV keinesfalls vernachlässigt werden dürfen, insbesondere nicht bei 17.8 und 23.0 MeV. Bei 23.0 MeV bringt der 2^- -Querschnitt sogar eine deutliche Verbesserung der Theorie im Vergleich zum Experiment mit sich (Fig.15b). Dennoch läßt sich nur eine recht grobe Übereinstimmung mit den experimentellen Daten feststellen. Die $d_{3/2}$ -Resonanz liegt um mindestens 500 KeV zu tief, und die relative Intensität der $d_{5/2}$ -Resonanz ist etwa nur einen Faktor $\frac{3}{4}$ zu gering. Ebenso kann (Be-

schränkung auf $1p-1h$ -Zustände) die Aufspaltung der beiden Resonanzen nicht reproduziert werden. Die intensivste 2^- -Resonanz liegt in der Energie nur wenig höher (≈ 100 keV) als beim Experiment, hat aber eine um den Faktor 3 zu große Intensität. Rechnungen, die für den gleichen Streuwinkel ($\theta = 155^\circ$), aber für andere Einschußenergien ($E_i = 60.0, 82.0, 100.0$ MeV) durchgeführt wurden, ergeben im Vergleich mit den entsprechenden Experimenten ein ähnliches Bild: Immer ist die Intensität der $d_{5/2}$ -Resonanz zu groß. Andererseits wird die pauschale Abnahme des experimentellen Wirkungsquerschnitts im Riesenresonanzbereich bei wachsender Einschußenergie (Impulsübertragung) von der Theorie im wesentlichen wiedergegeben, wenn auch die relative Änderung der beiden Resonanzen zu stark betont ist. Dabei nimmt der Anteil der 2^- -Zustände laufend zu und macht in der 23 MeV-Resonanz für $E_i = 100$ MeV bereits 60% der 1^- -Zustände aus. Daraus erklärt sich, daß die Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie ohne Berücksichtigung von 2^- -Zuständen ⁷⁾ noch größer ist.

In diesen Trend läßt sich auch das Spektrum mit $E_i = 131$ MeV und $\theta = 135^\circ$ einordnen (Fig.17). Darüber hinaus verzeichnen wir in Fig.17 bei 20.8 und oberhalb 23 MeV bereits merkliche Beiträge von 3^- -Zuständen zum Wirkungsquerschnitt, die teilweise mehr als 10% der 1^- -Komponente beisteuern. Bei 18.8 MeV treten die 3^- -Zustände sogar in einer recht deutlichen Resonanz hervor, die in Experimenten mit hinreichendem Auflösungsvermögen gesehen werden sollte, falls sie nicht von anderen hier unberücksichtigt gebliebenen Zuständen überlagert wird. Vergleichen wir in Fig.17b die Theorie mit den experimentellen Daten, so finden wir bezüglich der Resonanzen bei 19.4 und 22.6 MeV nichts wesentlich Neues gegenüber früher. Die theoretische Position der $d_{5/2}$ -Resonanz bei 24.5 MeV widerspricht hier im Gegensatz zu Fig.15b nicht dem Experiment. Die bei etwa 18 MeV gemessenen Resonanzen sollte man anhand von Fig.17b vor allem den 2^- -Zuständen zuordnen können. Eine ähnliche Zuordnung der Resonanzen zwischen 20 und 21.5 MeV ist kaum mehr zu rechtfertigen, da die 3^- -Resonanz bei 20.8 MeV noch zu schwach ist.

Zur Diskussion des letzten Beispiels ($E_1 = 275 \text{ MeV}$, $\theta = 135^\circ$) wenden wir uns den Fig.18 und 19 zu. Aus Fig.18a und b erfährt man, daß oberhalb 20 MeV Formfaktoren und Wirkungsquerschnitt der 1^- -Zustände jegliche Resonanzstruktur verloren und nur noch die 18 MeV-Resonanz behalten haben. Bei Formfaktor und Wirkungsquerschnitt der 2^- -Zustände (Fig.18c und d) ist die 18.2 MeV-Resonanz gegenüber den anderen Beispielen stark reduziert, und die sonst alle anderen überragende Resonanz bei 19.4 MeV nur noch im Ansatz zu erkennen. Eine Erklärung dafür finden wir in Fig.10, wo der 2^- -Formfaktor dreidimensional in Abhängigkeit von k und E aufgetragen ist. Die Impulsübertragung $k \approx 2.4 \text{ fm}^{-1}$ ist nämlich zumindest für $E=19.4 \text{ MeV}$, dort gerade so groß, daß sie in der Nähe des scharf ausgeprägten Born'schen Minimums liegt. Die Reduzierung der 18.2 MeV-Resonanz führen wir zum Teil auf das Ausbleiben eines zweiten Maximums bei $k \approx 2.5 \text{ fm}^{-1}$ zurück. Zu den 3^- -Zuständen (Fig.18e und f) bemerken wir, daß der transversale Formfaktor bei 18.8 MeV praktisch gleich dem longitudinalen ist und im Bereich oberhalb 22.5 MeV sogar größer. Weiter ist zu erwähnen, daß sich die breite Resonanz, hier bei 25.6 MeV, mit wachsenden k nach größeren Energien verschiebt. So beträgt der Unterschied zwischen Fig.14c und Fig. 18e fast 1 MeV. Den gesamten Wirkungsquerschnitt, der aus Fig.18a bis e folgt, finden wir in Fig.19. Wir sehen (Fig.19a), daß der Beitrag der 1^- -Zustände praktisch überall von den 2^- - und 3^- -Anregungsquerschnitten übertroffen wird. Die einzige bei 1^- noch vorhandene Resonanz (17.8 bis 18 MeV) fällt wie auch in Fig.15 und 17 mit den beiden starken 2^- -Resonanzen zusammen und ist im Wirkungsquerschnitt nicht zu identifizieren. Von den 2^- - und 3^- -Zuständen dagegen sind alle, einige zumindest andeutungsweise zu erkennen. Wir weisen besonders auf die Dominanz der scharfen 3^- -Peaks bei 18.8 MeV und der breiten 3^- -Resonanz bei 25.6 MeV hin. Auch das Hervortreten der 2^- -Resonanz bei 16.7 MeV verdient Beachtung. Dabei vergesse man allerdings nicht, daß der gesamte Anregungsquerschnitt gegenüber den anderen Beispielen bis zu einem Faktor 50 kleiner ist. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt zum Teil größere Diskrepanzen. Die beiden Resonanzen um 18 MeV werden kaum bestätigt. Die 3^- -Resonanzen

bei 18.8 und 20.8 MeV können zwar in dem großen experimentellen Peak zwischen 18.5 und 21 MeV enthalten sein, jedoch längst nicht voll ausschöpfen. Es ist daher plausibel anzunehmen, daß die Abwesenheit der sonst so kräftigen 2^- -Resonanz bei 19.4 MeV im theoretischen Querschnitt unrealistisch ist. Im Hinblick darauf, daß die hier vorliegende Impulsübertragung $k \approx 2.4 \text{ fm}^{-1}$ in die Nähe eines Born'schen Minimums fällt, verwundert nicht allzu sehr. Denn dort, ist die Born'sche Näherung, dazu bei großen k , ohnehin nicht die beste. Andererseits könnte man sicher einiges durch Hinzunahme von 4^- -Zuständen retten. Als vom Experiment bestätigt betrachten wir die 2^- -Resonanz bei 16.7 MeV, die dort einen gewichtigen Anteil des gemessenen Querschnitts ausmachen sollte. Das gleiche gilt für die von der Theorie behauptete geringe Bedeutung der Dipolriesenresonanzen. Ebenso halten wir die theoretisch vorausgesagte pauschale Größenordnung der Anregungsquerschnitte für relativ zufriedenstellend. Damit schließen wir die Diskussion unserer numerischen Beispiele für die Anregung von Einteilchenkontinua in C^{12} durch inelastische Elektronenstreuung ab.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Streuprozesse vom Typ (e,e') , $(e,e'p)$ und $(e,e'n)$ untersucht, d.h. Reaktionen, in denen ein Elektron durch inelastischen Stoß einem Kern soviel Energie überträgt, daß dieser seinerseits ein Teilchen emittieren kann.

Bei der Beschreibung dieser Prozesse haben wir uns wegen der — im Vergleich mit den Kernkräften — schwachen elektromagnetischen Wechselwirkung auf Störungsrechnung 1. Ordnung beschränkt. Damit war das Streuproblem auf die Berechnung von Übergangsmatrixelementen eines Störoperators (elektromagnetische Wechselwirkung) zwischen entsprechenden Streuwellen als Anfangs- und Endzustände zurückgeführt. Die Anfangszustände setzten sich aus der ebenen Welle des einfallenden Elektrons (Born'sche Näherung) und dem Grundzustand des Targetkerns zusammen, die Endzustände aus der ebenen Welle des ausfallenden Elektrons und dem Streuzustand (Einteilchenkontinuum) des Kerns. Das Einteilchenkontinuum haben wir im Rahmen der Eigenkanaltheorie durch Eigenphasen, Eigenvektoren der S-Matrix des Kernstreuzustandes und Eigenkanalwellenfunktionen (Eigenkanalzustände) beschrieben. Existieren bei einer Anregungsenergie E n offene Kanäle, dann gibt es n entartete, nach Eigenkanälen $\nu = 1, \dots, n$ klassifizierbare Streuzustände, die Eigenkanalzustände. Bei der Herleitung der Wirkungsquerschnitte, Anregungsquerschnitt und Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen, wurden entsprechend dem geforderten asymptotischen Verhalten Superpositionen der Eigenkanalzustände gebildet. Für den Anregungsquerschnitt genügte es allerdings, den Streuzustand mit einem der Eigenkanalzustände zu identifizieren. Mangels einer Meßvorschrift zur experimentellen Unterscheidung verschiedener Eigenkanalzustände haben wir die einzelnen Anregungsquerschnitte für die Eigenkanäle zu einem Gesamtquerschnitt aufsummieren müssen. Die Querschnittsformel für Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen folgte aus demjenigen Kernzustand, der einem in vorgegebener Richtung ausfallenden Nukleon entsprach: einer Überlagerung der Eigenkanalvektoren zur entsprechenden ebenen Teilchenwelle.

Numerische Rechnungen und Vergleiche mit Experimenten haben wir für Anregungsquerschnitte von C^{12} durchgeführt. Im einzelnen wurden energieabhängige transversale und longitudinale Formfaktoren in einem Bereich von Anregungsenergieen zwischen 16 und 30 MeV berechnet und zwar für 1^- -, 2^- - und 3^- -Zustände des Compoundkerns. Die aus den Formfaktoren folgenden Anregungsquerschnitte haben wir für die kinematischen Daten einiger in Saskatoon und Stanford ausgeführter Experimente berechnet.

Als Ergebnisse dieser Arbeit halten wir schließlich fest: Es liegen in der Terminologie der Eigenkanaltheorie Formeln vor für Anregungsquerschnitte (e, e') des Einteilchenkontinuums sowie für Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen der Reaktionen $(e, e'p)$ und $(e, e'n)$. Als typischen Effekt des Kontinuums infolge seiner Entartung verzeichnen wir, daß die inelastischen Formfaktoren zum Teil stark "ausgeschmierte" Minima und Maxima aufweisen. Dies ist augenscheinlich nicht auf die hier verwendete Born'sche Näherung beschränkt, sondern behält auch seine Gültigkeit etwa bei Partialwellenanalyse. Weiter machen unsere theoretischen Spektren aus naheliegenden Gründen nicht, wie etwa solche aus Rechnungen mit gebundenen Zuständen, nur Aussagen an den Resonanzstellen (Kernniveaus) sondern auch außerhalb. Sie liefern also u.a. auch Resonanzbreiten. Im Hinblick auf entsprechende theoretische Spektren für Reaktionen mit Photonen wurde der Bereich von Voraussagen der Eigenkanaltheorie und damit die Vergleichsmöglichkeiten mit Experimenten wesentlich erweitert. So können wir auch höhere Multipolübergänge, die bei γ -Experimenten nicht mehr zu sehen sind wohl aber bei (e, e') , zu Vergleichen heranziehen, wie hier: 2^- - und 3^- -Übergänge bei nicht zu kleinen Impulsübertragungen. Eine Einarbeitung kurzreichweitiger Nukleon-Nukleon-Korrelationen erscheint uns in diesem Rahmen "straight forward" und — vor allem für die Emission mehrerer Nukleonen — wichtig und wünschenswert.

Anhang: Zur Superposition der Eigenkanalzustände

Er soll gezeigt werden, daß der zur Berechnung der Elektron-Nukleon-Winkelkorrelationen benutzte Endzustand

$$|f\rangle = \frac{v_a^{\frac{1}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi}{k_a} \sum_{JM_i} \sum_{\ell_A J_A} \sum_{\nu} (-)^{J_A+M_i+\mu} i^{\ell_A} (j_a j_A \mu M_i - \mu | JM_i) (\ell_A s_A M_i - \mu m_s | j_A M_i - \mu) \times Y_{\ell_A M_i - \mu - m_s}^* e^{i\delta_{J\nu}^v} V_{\alpha \ell_A J_A}^{J\nu} \psi_E^{J\nu} \quad (A.1)$$

sich asymptotisch ($r \rightarrow \infty$) wie eine ebene Welle (Neutronen) verhält, d.h.,

$$|f\rangle \approx \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\vec{k}_a \vec{r}_A} |s_A m_s\rangle |t_A m_t^*\rangle \Phi_{\alpha}^{M_i+m} \quad (A.2)$$

Zu diesem Zweck ersetzen wir die Eigenkanalfunktion $\psi_E^{J\nu}$ in (A.1) durch die entsprechenden Ausdrücke des 5. Kapitels. Nach (4.8), (4.12), (4.15) und (4.16) ist

$$\begin{aligned} \psi_E^{J\nu} &= \frac{i}{2} \sum_c \frac{1}{r_A v_c^{\frac{1}{2}}} V_c^{J\nu} \{ I_c e^{-i\delta_{J\nu}^v} - O_c e^{i\delta_{J\nu}^v} \} \varphi_c \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha \ell_A J_A} \frac{1}{r_A v_a^{\frac{1}{2}}} V_{\alpha \ell_A J_A}^{J\nu} \{ I_{\alpha \ell_A J_A} e^{-i\delta_{J\nu}^v} - O_{\alpha \ell_A J_A} e^{i\delta_{J\nu}^v} \} \times \\ &\quad \times \sum_m (-)^{J_A-m} (j_a j_A M_i+m - m | JM_i) (\ell_a s_a) j_a M_i+m^* (\ell_A s_A) j_A m^* | t_A m_t^* \rangle | t_A m_t^* \rangle \frac{1}{r_a} u_{\alpha \ell_A J_A}(r_a), \end{aligned} \quad (A.3)$$

wobei gilt^{*)}

$$I_{\alpha \ell_A}^* = O_{\alpha \ell_A} = e^{-i\omega_{\alpha \ell_A}} \{ G_{\alpha \ell_A} - i F_{\alpha \ell_A} \} \approx e^{i(k_a r_a - \frac{1}{2} \ell_A \pi - \eta_{\alpha \ell_A} \ln 2 k_a r_a)} \quad (A.4)$$

*) Siehe Anhang B von 35)

$G_{\alpha l_A}$ bzw. $F_{\alpha l_A}$ bedeuten in 0 reguläre bzw. irreguläre Coulombfunktionen, und

$$\eta_{\alpha l_A} = \begin{cases} \frac{e^2}{\hbar v_{\alpha}} & \text{für Protonen } (\alpha = n_{\alpha} l_{\alpha} j_{\alpha}^{-1/2}) \\ 0 & \text{für Neutronen } (\alpha = n_{\alpha} l_{\alpha} j_{\alpha}^{-1/2}) \end{cases} \quad (A.5)$$

bezeichnet den Coulombparameter. Weiter ist

$$w_{\alpha l_A} = \sum_{n=1}^{l_A} \tan^{-1} \left(\frac{\eta_{\alpha n}}{n} \right) . \quad (A.6)$$

Nach Substitution von $\Psi_E^{j_1 j_2}$ durch (A.3) hat (A.1) die Gestalt

$$\begin{aligned} |f\rangle = & \frac{v_{\alpha}^i}{V^i} \frac{4\pi}{k_{\alpha} r_A} \sum_{J H_f} \sum_{l_A j_A} \sum_{\nu} (-)^{j_A + H_f - \mu} i^{l_A} (j_{\alpha} j_A \mu H_f - \mu | J H_f) (l_A s_A H_f - \mu - m_s m_s | j_A H_f - \mu) \\ & \times Y_{l_A H_f - \mu - m_s}^*(k_{\alpha}) e^{i \delta_{j_A}^{\nu}} V_{\alpha l_A j_A}^{j_1 j_2} \frac{i}{2} \sum_{\alpha' l_A' j_A'} v_{\alpha'}^i V_{\alpha' l_A' j_A'}^{j_1 j_2} \{ I_{\alpha' l_A'} e^{-i \delta_{j_A'}^{\nu}} - O_{\alpha' l_A'} e^{i \delta_{j_A'}^{\nu}} \} \\ & \times \sum_m (-)^{j_A - m} (j_{\alpha} j_A H_f + m - m | J H_f) | (l_{\alpha} s_{\alpha}) j_A H_f + m \rangle^* | (l_A s_A) j_A m \rangle | \tau_{\alpha} m_{\alpha}^{\dagger} \rangle^* | \tau_A m_A^{\dagger} \rangle \frac{1}{r_A} u_{n_{\alpha} l_{\alpha} j_{\alpha}}(r_{\alpha}) . \end{aligned} \quad (A.7)$$

Wir müssen nun zeigen, daß alle einlaufenden, d.h., alle $I_{\alpha' l_A'}$ proportionalen Anteile aus (A.7) mit den entsprechenden Summanden aus der Rayleigh-Entwicklung der ebenen Welle übereinstimmen. Nutzen wir aus, daß man die Summe über wegen der Orthogonalität

$$\sum_{\nu} V_{\alpha l_A j_A}^{j_1 j_2} V_{\alpha' l_A' j_A'}^{j_1 j_2} = \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{l_A l_A'} \delta_{j_A j_A'}$$

der Eigenkanäle ausführen kann, so können wir für den gesamten einlaufenden Anteil schreiben :

$$\begin{aligned} |f\rangle_{\text{einl. A.}} = & \frac{1}{V^i} \frac{2\pi i}{k_{\alpha} r_A} \sum_{J H_f} \sum_{l_A j_A} (-)^{j_A + H_f - \mu} i^{l_A} (j_{\alpha} j_A \mu H_f - \mu | J H_f) (l_A s_A H_f - \mu - m_s m_s | J H_f) Y_{l_A H_f - \mu - m_s}^*(k_{\alpha}) I_{\alpha l_A} \\ & \times \sum_m (-)^{j_A - m} (j_{\alpha} j_A H_f + m - m | J H_f) | (l_{\alpha} s_{\alpha}) j_A H_f + m \rangle^* | (l_A s_A) j_A m \rangle | \tau_{\alpha} m_{\alpha}^{\dagger} \rangle^* | \tau_A m_A^{\dagger} \rangle \frac{1}{r_A} u_{n_{\alpha} l_{\alpha} j_{\alpha}}(r_{\alpha}) . \end{aligned} \quad (A.8)$$

Wir entwickeln nun $|(l_A s_A) f_A m\rangle$ nach Eigenfunktionen zu Spin und Bahndrehimpuls Teilchens

$$|(l_A s_A) f_A m\rangle = \sum_{m_{l_A}} (l_A s_A m_{l_A} m_s | f_A m) Y_{l_A m_{l_A}}(r_A) |s_A m_s\rangle \quad (A.9)$$

und schreiben mit der Abkürzung

$$\Phi_{\alpha}^{H_f+m} = |(l_A s_A) f_A H_f+m\rangle^* |T_A m_c^A\rangle^* \frac{1}{r_A} u_{n_A l_A f_A}(r_A) \quad (A.10)$$

den Endzustand als

$$\begin{aligned} |f\rangle_{\text{einf. A.}} &= \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{2\pi i}{k_A r_A} \sum_{J H_f} \sum_{l_A f_A} \sum_{m m_{l_A}} i^{l_A} (-)^{J_A+H_f-\mu} (f_A f_A \mu H_f-\mu | J H_f) (l_A s_A H_f-\mu-m_s m_c | f_A H_f-\mu) \times \\ &\quad (-)^{J_A-m} (f_A f_A H_f+m-m | J H_f) (l_A s_A m_{l_A} m_s | f_A m) \times \\ &\quad \times I_{\alpha l_A} Y_{l_A H_f-\mu-m_s}^*(k_A) Y_{l_A m_{l_A}}(\hat{r}_A) |s_A m_s\rangle |T_A m_c^A\rangle \Phi_{\alpha}^{H_f+m}. \end{aligned} \quad (A.11)$$

Schließlich führen wir noch alle Summen über die Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus: Mit

$$\sum_{J_f} (f_A f_A \mu H_f-\mu | J H_f) (f_A f_A H_f+m-m | J H_f) = \delta_{H_f-\mu, -m} \quad (A.12)$$

und

$$\sum_{f_A} (l_A s_A m_{l_A} m_s | f_A m) (l_A s_A m_{l_A} m_s | f_A m) = \delta_{-m, -m} \quad (A.13)$$

ergibt sich

$$|f\rangle_{\text{einf. A.}} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{2\pi i}{k_A r_A} \sum_{l_A m_{l_A}} i^{l_A} I_{\alpha l_A} Y_{l_A m_{l_A}}^*(k_A) Y_{l_A m_{l_A}}(\hat{r}_A) \cdot |s_A m_s\rangle |T_A m_c^A\rangle \Phi_{\alpha}^{H_f+m}. \quad (A.14)$$

Im Falle von Neutronen stimmen also die einlaufenden Anteile (A.14) von $|f\rangle$ mit den einlaufenden Anteilen von

$$\frac{1}{V_A} e^{i\vec{k}_\alpha \vec{r}_A} |s_A m_s\rangle |t_A m_t\rangle \Phi_\alpha^{M_i+m} \quad (\text{A.15})$$

überein, wenn man $e^{i\vec{k}_\alpha \vec{r}_A}$ nach Rayleigh entwickelt,

$$e^{i\vec{k}_\alpha \vec{r}_A} = 4\pi \sum_{\ell_A m_{\ell_A}} i^{\ell_A} j_{\ell_A}(k_\alpha r_A) Y_{\ell_A m_{\ell_A}}^*(\hat{k}_\alpha) Y_{\ell_A m_{\ell_A}}(\hat{r}_A), \quad (\text{A.16})$$

und berücksichtigt, daß für die Besselfunktionen

$$j_{\ell_A}(k_\alpha r_A) = \frac{2}{2} \frac{I_{\alpha \ell_A} - O_{\alpha \ell_A}}{k_\alpha r_A} \quad (\text{A.17})$$

gilt.

Literatur

- 1) R. Hofstadter, Nuclear and Nucleon Structure (New York 1963, Benjamin)
- 2) W. Czyz, Phys. Rev. 131 (1963) 2141
- 3) G. Jacob, T.A.J. Maris, Nucl.Phys. 31 (1962) 139 und 152
- 4) U. Amaldi Jr., G. Campos Venuti, G. Cortellessa, E. de Sanktis S. Frullani, R. Lombard, P. Salvadori, Phys.Lett. 25B(1967)24
- 5) W.C. Barber, Ann.Rev.Nuc.Sci. 12 (1962) 1
- 6) T. de Forest, J.D. Walecka, Adv. i. Phys. 15 (1966) 1
- 7) J.L. Friar, Nucl.Phys. 84 (1966) 150
- 8) B. Diehl, Nucl.Phys. 82 (1966) 521
- 9) P. Antony-Spies, W. Donner, H.G. Wawsweiler, W. Greiner, Phys.Lett. 26B(1968)268
- 10) H.R. Molloy, M.S.-Dissertation, University of Saskatchewan, Saskatoon (1967)
- 11) T. de Forest, Ann.Phys. (N.Y.) 45 (1967) 365
- 12) D. Drechsel, H. Überall, Preprint (1968)
- 13) G. Fricke, Private Mitteilung
- 14) M. Danos, W. Greiner, Phys.Rev. 138 (1965) B 93; 146 (1966) B 708
- 15) H.G. Wawsweiler, Habilitationsschrift, Frankfurt/M. 1967
- 16) M. Danos, W. Greiner, Z.Phys. 202 (1967) 125
- 17) Ch. Toepffer, Dissertation, Frankfurt/M. 1967
- 18) Ch. Toepffer, W. Greiner, Annals of Physics, Phys.Rev., to be published
- 19) L.I. Schiff, Quantum Mechanics (New York 1955, Mc Graw-Hill)
- 20) C. Møller, Z.Physik 70 (1931) 786

- 21) K.W. Mc Voy, L. van Hove, Phys.Rev. 125 (1962) 1034
- 22) J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik (B1 98/98a, 1964)
- 23) M.E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum (New York, 1966, J. Wiley & Sons)
- 24) A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik, (B1 53/53a)
- 25) J.M. Eisenberg, W. Greiner, Excitation Mechanisms of Nuclei, (Amsterdam 1969, North Holland Publ. Comp.)
- 26) V. Gillet, N. Vinh Mau, Nucl.Phys. 54 (1964) 321
- 27) H.G. Wahsweiler, W. Greiner, M. Danos, Phys.Rev. 170 (1968) 893
- 28) P.P. Delsanto, H.G. Wahsweiler, W. Greiner, L.C. Biedenharn, Annals of Physics, to be published
- 29) B. Buck, A.D.Hill, Nucl.Phys. A95 (1967) 271
- 30) G. Ricco, H.S. Caplan, R.M. Hutcheon, R.M. Malvano, Nucl.Phys. A114 (1968) 685
- 31) T.W. Donnelly, J.D. Walecka, J. Sick, E.B. Hughes, Preprint (1968)
- 32) F.H. Lewis, J.D. Walecka, Phys.Rev. 133 (1964) B849
- 33) J. Goldenberg, W.C. Barber, Phys.Rev. 134 (1964) B963
- 34) G.A. Proca, D.B. Isabelle, Nucl.Phys. A109 (1968) 177
- 35) M.A. Preston, Physics of the Nucleus, (Reading, Mass., 1965, Addison Wesley)

Fig.6 Formfaktoren für die Anregung der Dipolriesenresonanz bei 22.6 MeV in C^{12} in Abhängigkeit von der Impulsübertragung k .

Die dünn ausgezogenen Kurven stellen die partiellen transversalen und longitudinalen Formfaktoren $T_{(eJ)}^{\nu 2}$ und $M_{(eJ)}^{\nu 2}$ dar, die der Anregung individueller Eigenkanalzustände des Kontinuums entsprechen. Zur Unterscheidung sind die einzelnen Kurven mit den zugehörigen Eigenphasen $\delta_J^{\nu} = 97.1, 53.1, 6.4, 27.6, 85.0$ und 103.0° gekennzeichnet. Den Gesamtformfaktor (dick ausgezogene Kurve) erhält man durch Addition der partiellen Formfaktoren.

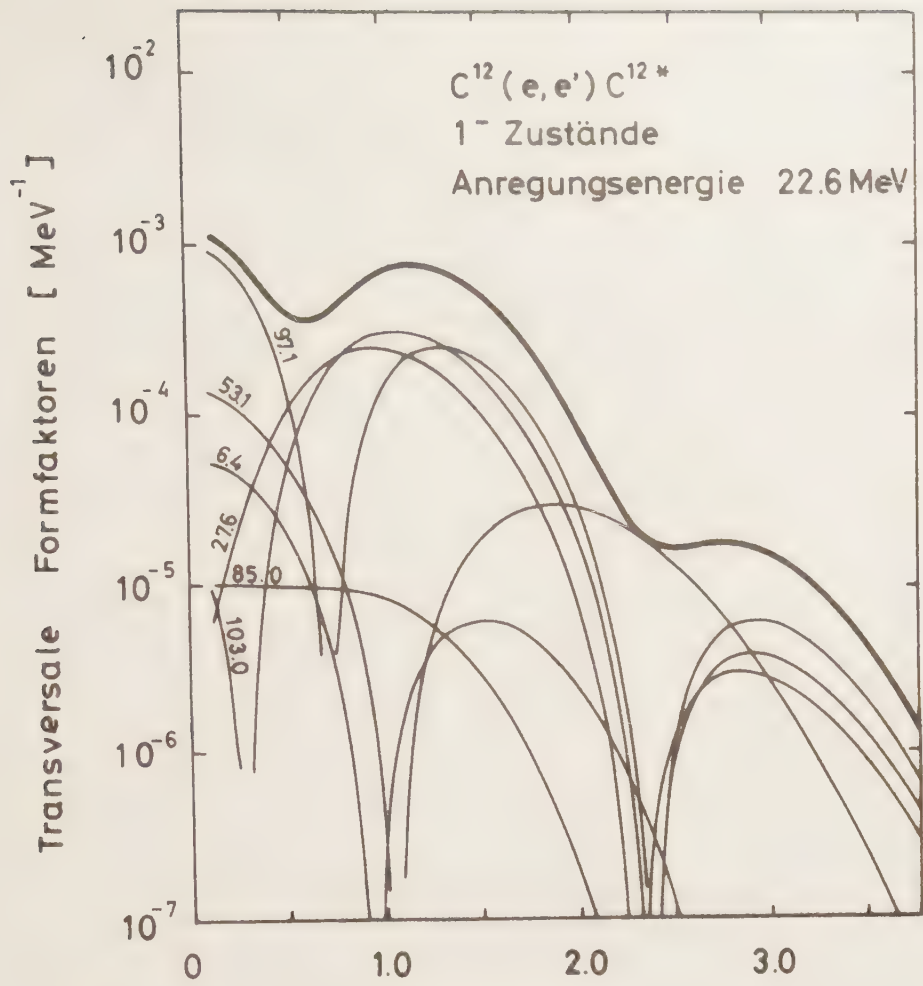


Fig.6a

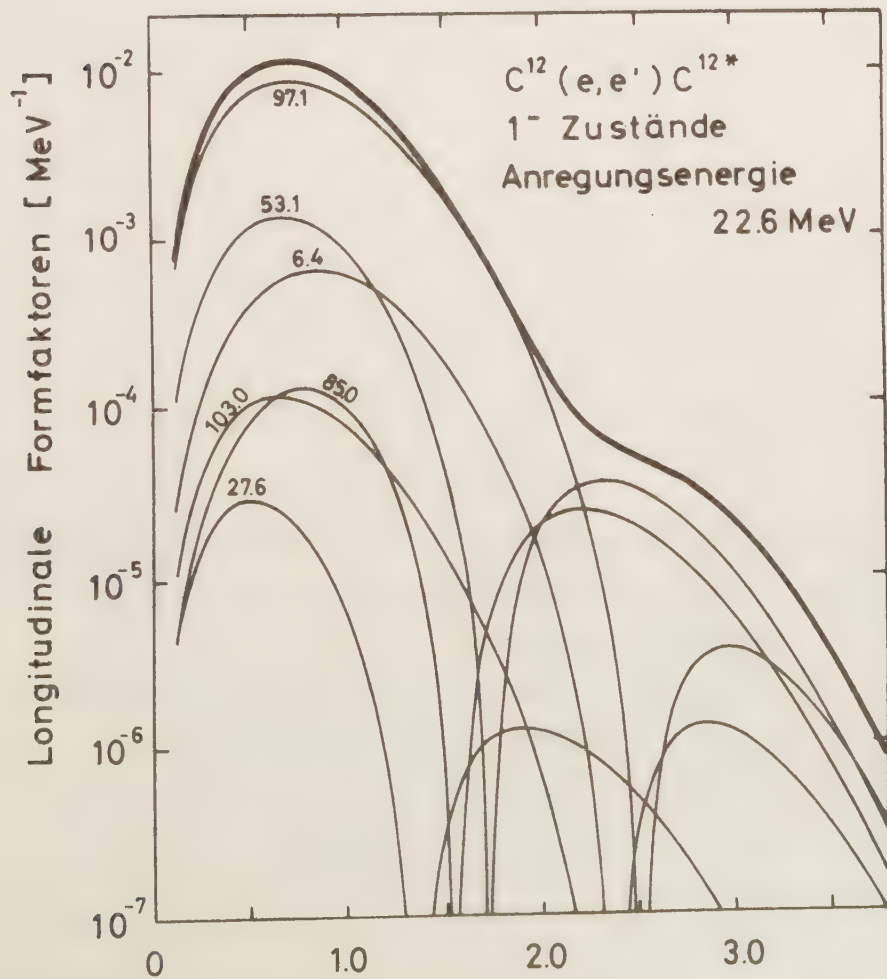


Fig.6b

Fig.7 Zur Erklärung des Minimums im transversalen Formfaktor der Dipolriesenresonanz (22.6 MeV) bei kleinen Impulsübertragungen.

Die Kurven beziehen sich auf die beiden dominanten transversalen Formfaktoren ($\delta_{\pi}^{\nu} = 97.1$ und 27.6°) in Fig.6a.

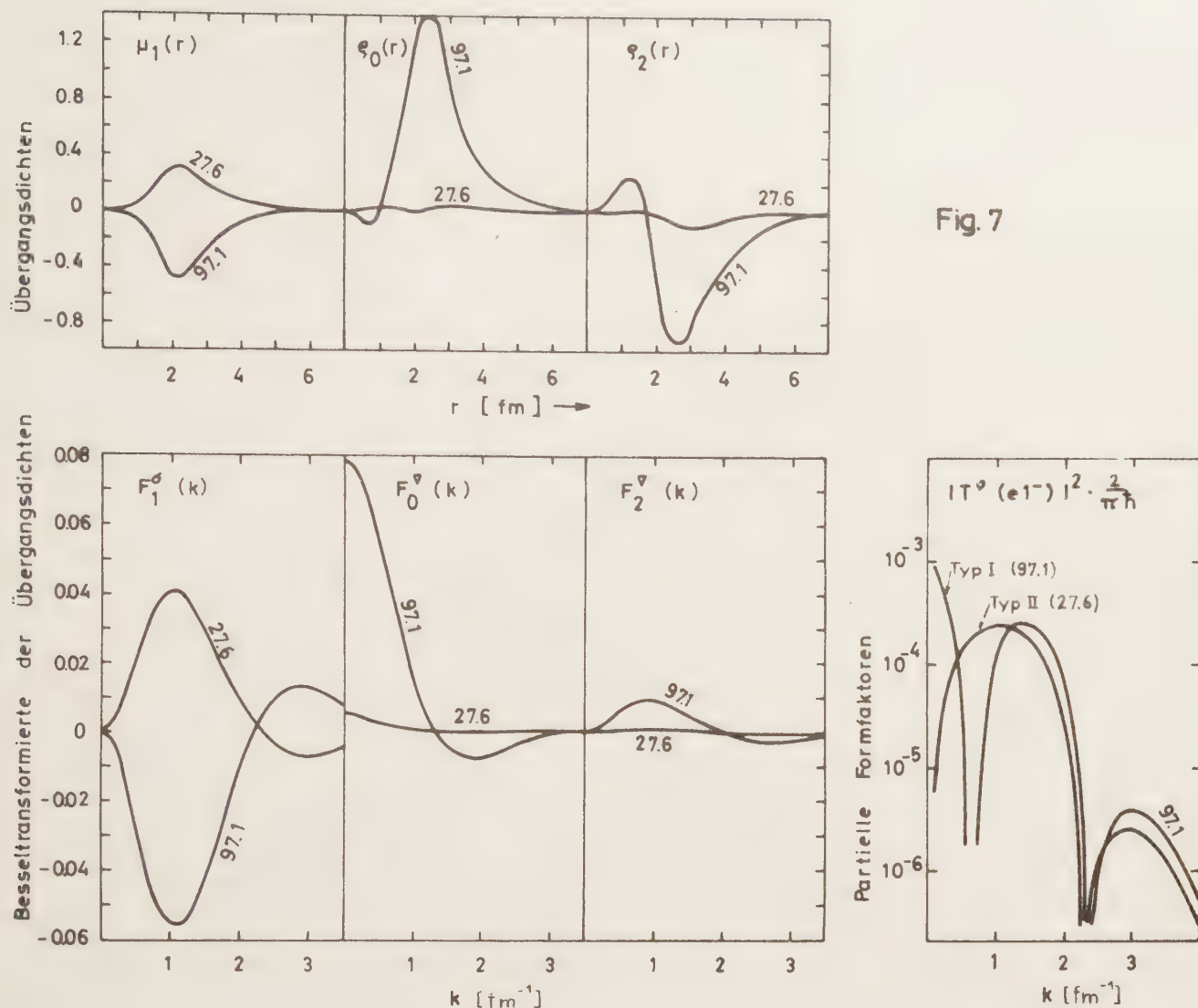


Fig. 7

Tabelle der Teilchen-Loch-Amplituden der beiden zugehörigen Kontinuumszustände

Eigenphase	n_A	Protonenkonfigurationen			Neutronenkonfigurationen		
		$(s_{\frac{1}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	$(d_{\frac{5}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	$(d_{\frac{3}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	$(s_{\frac{1}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	$(d_{\frac{5}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	$(d_{\frac{3}{2}} p_{\frac{3}{2}}^{-1})$
97.1	1	0.0006	0.4796	0.0036	-0.0292	-0.5626	0.0003
	2	0.0279	0.3509	0.2898	0.1191	-0.3107	0.0670
	3	-0.1364	-0.2388	-0.0185	0.0174	0.2013	-0.0016
	4	-0.0191	-0.0726	-0.0053	0.0101	0.0745	-0.0002
	5	-0.0110	-0.0382	-0.0029	0.0068	0.0408	-0.0002
	6				0.0046	0.0237	
27.1	1	0.0208	0.0104	0.3257	-0.0282	0.1426	-0.8477
	2	0.0603	-0.0278	-0.2356	-0.0623	-0.1463	0.2530
	3	-0.0190	-0.0024	-0.0275	0.0183	-0.0265	0.0357
	4	-0.0082	-0.0013	-0.0115	0.0070	-0.0140	0.0158
	5	-0.0050	-0.0008	-0.0056	0.0038	-0.0086	0.0085
	6				0.0022	-0.0053	

n_A bedeutet die Radialquantenzahl der entsprechenden Teilchenfunktion

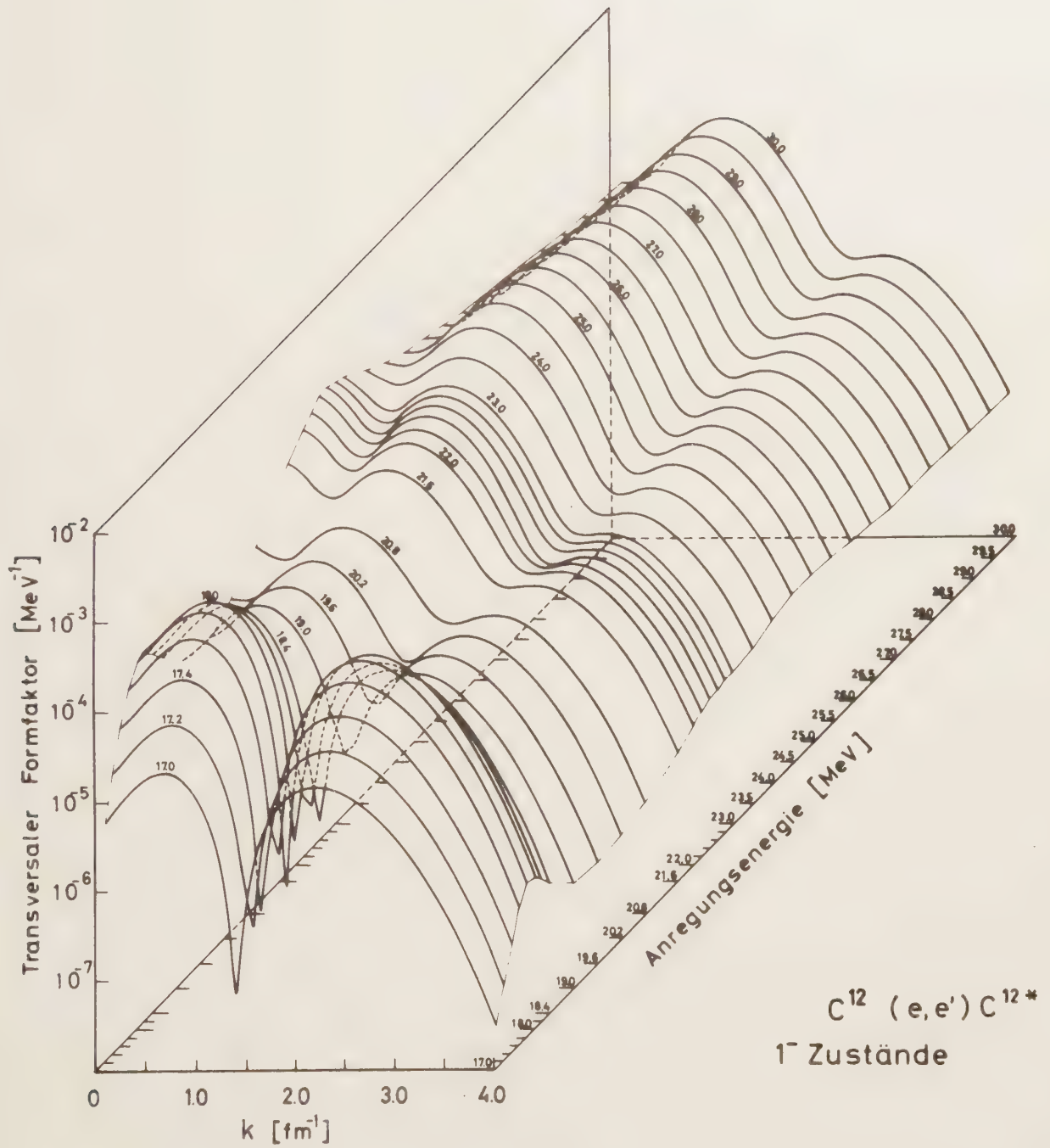


Fig.8 Anregung des 1^- -Kontinuums ($1p-1h$) von ^{12}C .
 Überblick über die Abhängigkeit des transversalen
 Formfaktors von Impulsübertragung und Anregungs-
 energie.

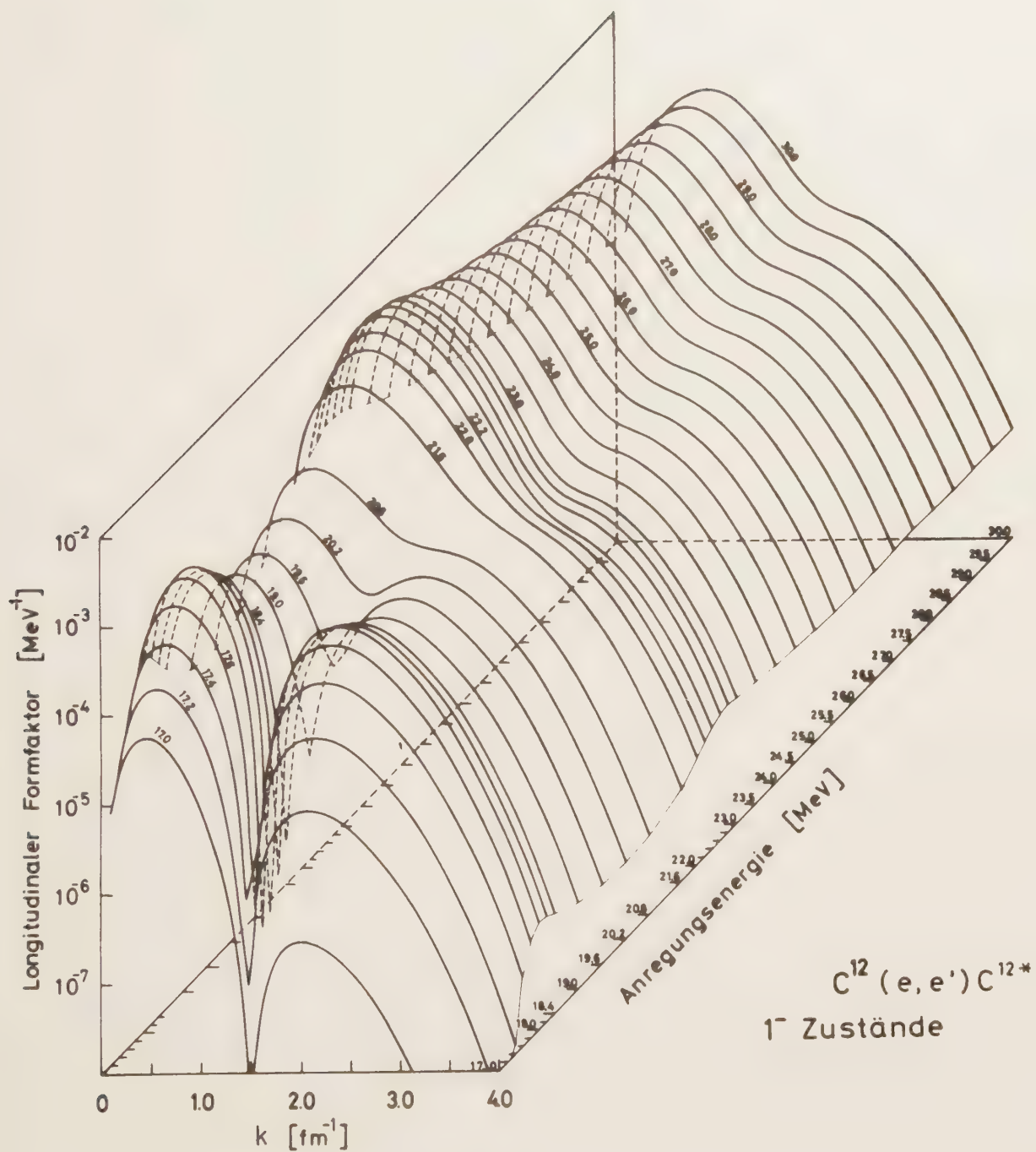


Fig.9 Anregung des 1^- -Kontinuums ($1p-1h$) von C^{12} .
Überblick über die Abhängigkeit des longitudinalen
Formfaktors von Impulsübertragung und Anregungs-
energie.

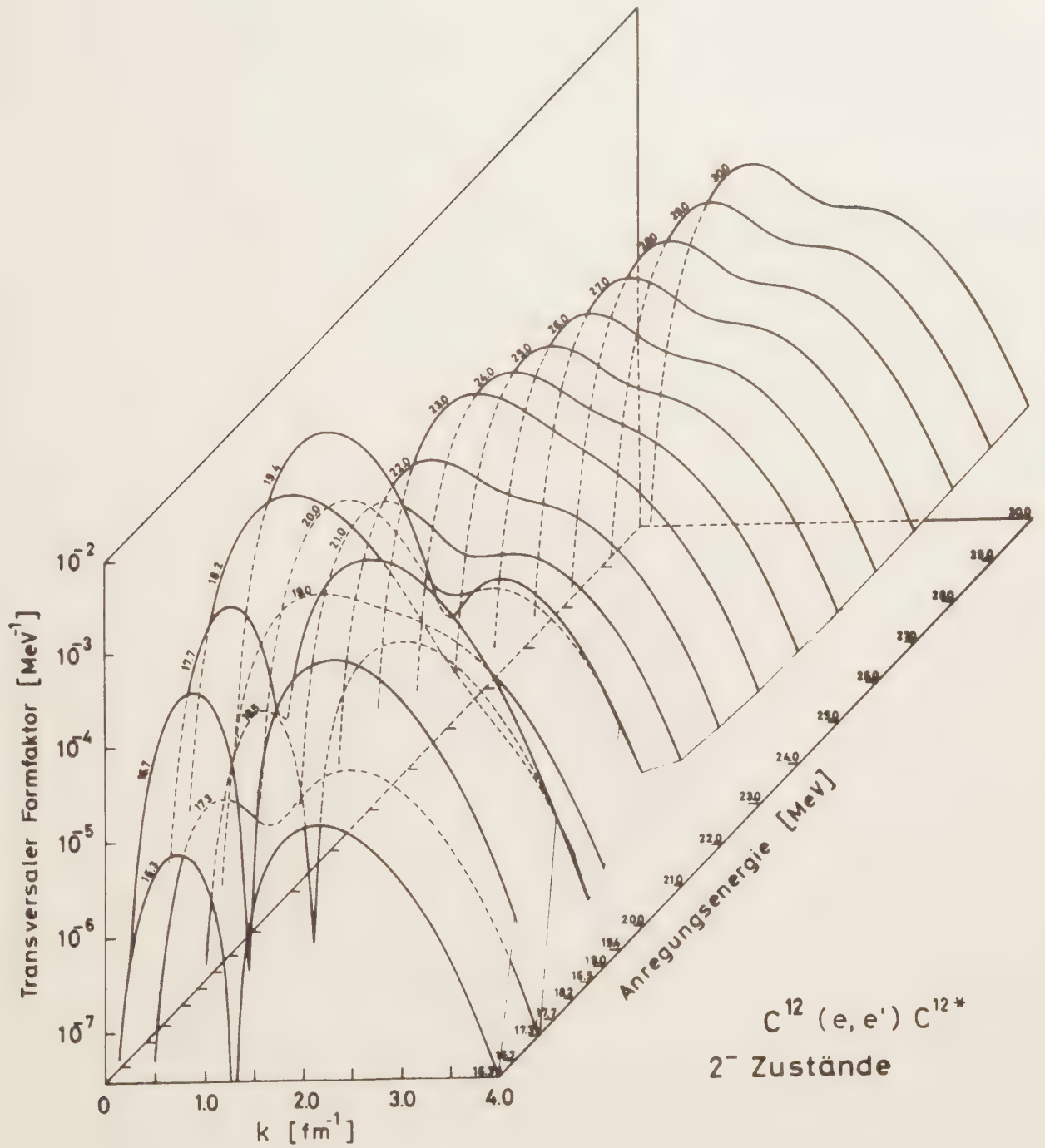


Fig.10 Anregung des 2^- -Kontinuums (1p-1h) von ^{12}C .
 Überblick über die Abhängigkeit des transversalen
 Formfaktors von Impulsübertragung und Anregungs-
 energie.

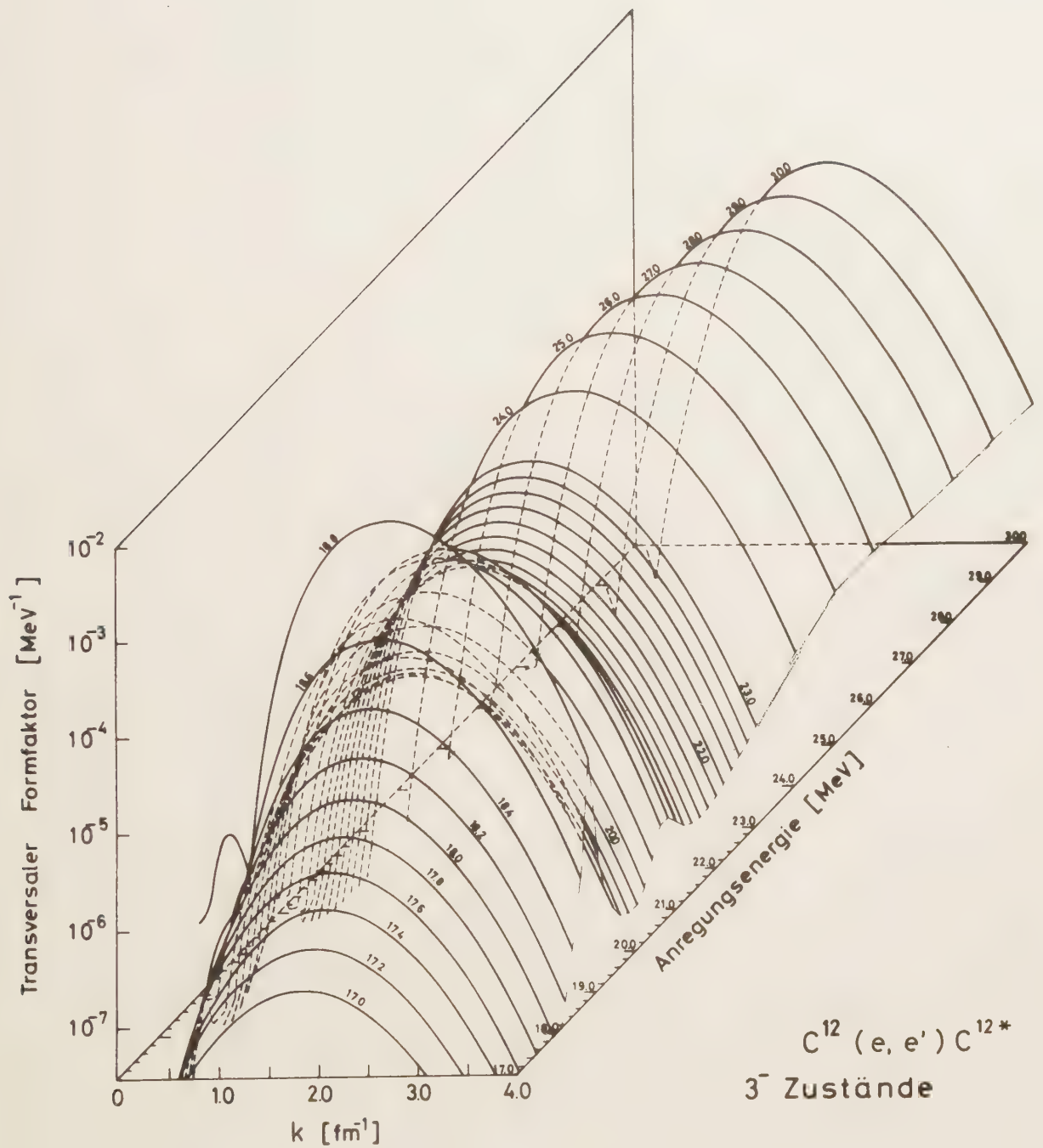


Fig.11 Anregung des 3^- -Kontinuums ($1p-1h$) von C^{12} .
 Überblick über die Abhängigkeit des transversalen
 Formfaktors von Impulsübertragung und Anregungs-
 energie.

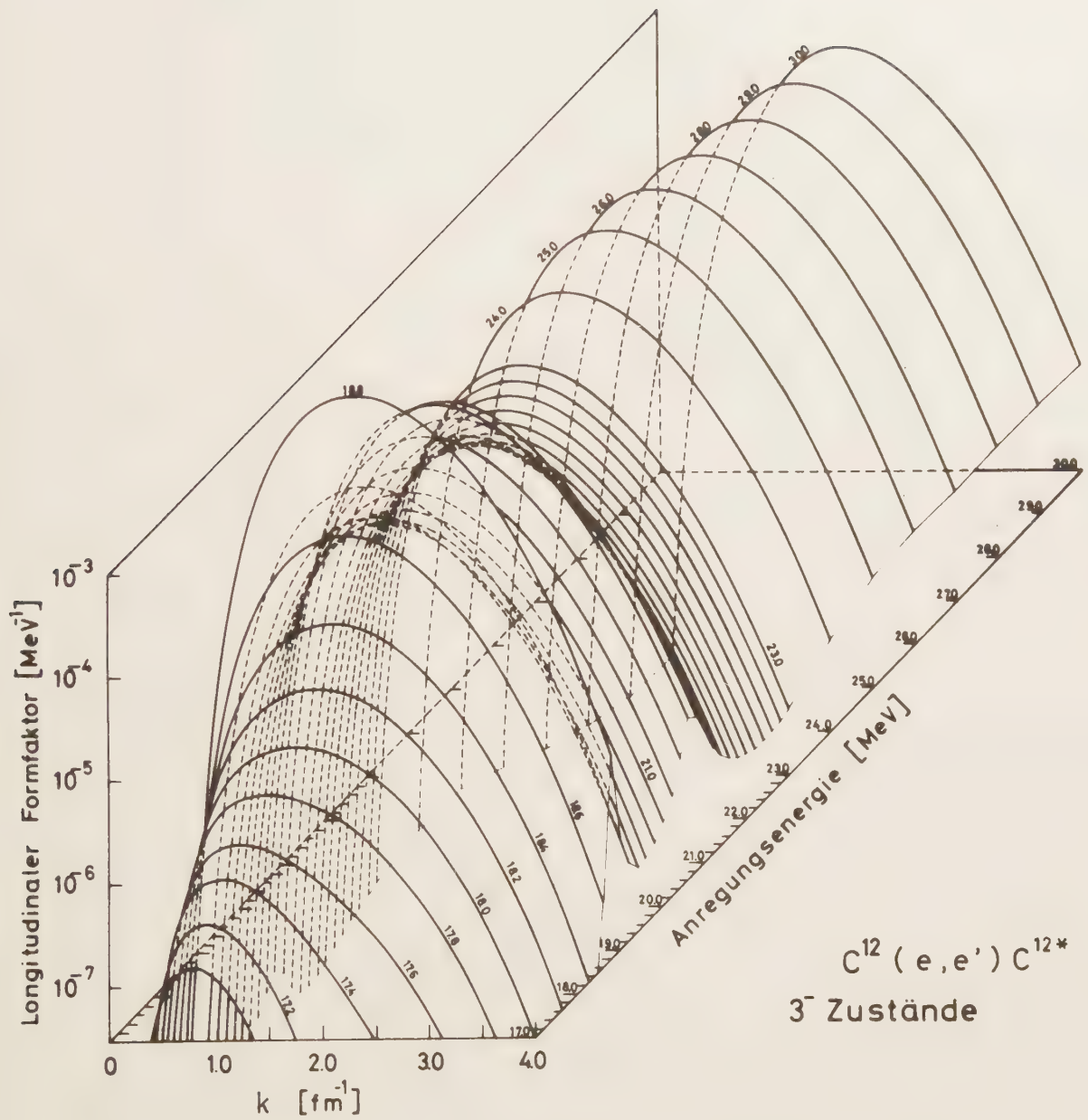


Fig.12 Anregung des 3^- -Kontinuums (1p-1h) von ^{12}C .
 Überblick über die Abhängigkeit des longitudinalen
 Formfaktors von Impulsübertragung und Anregungs-
 energie.

Fig.13 Integrierte transversale und longitudinale Formfaktoren in Abhängigkeit von der Impulsübertragung. Integrationsbereich 20 bis 26 MeV. Die dick ausgezogenen Kurven stellen die Summe über die 1^- -, (2^-) und 3^- -Formfaktoren (dünn ausgezogene Kurven) dar.

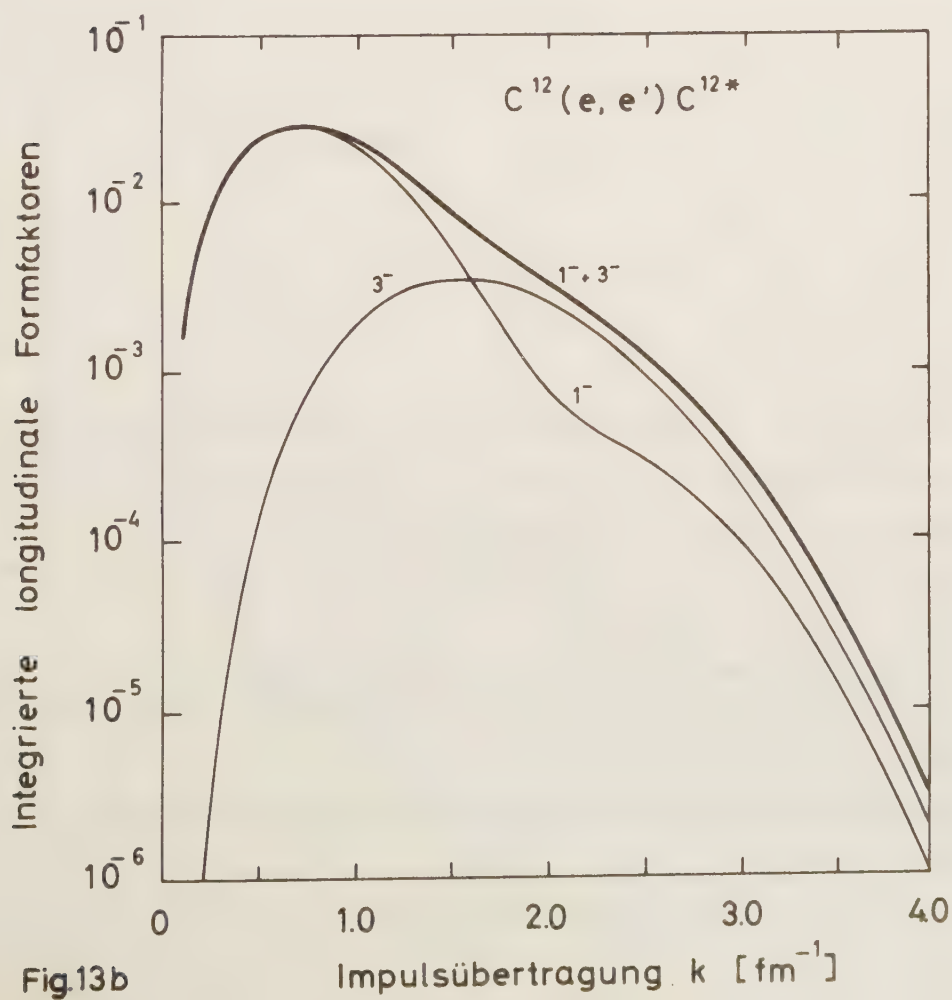
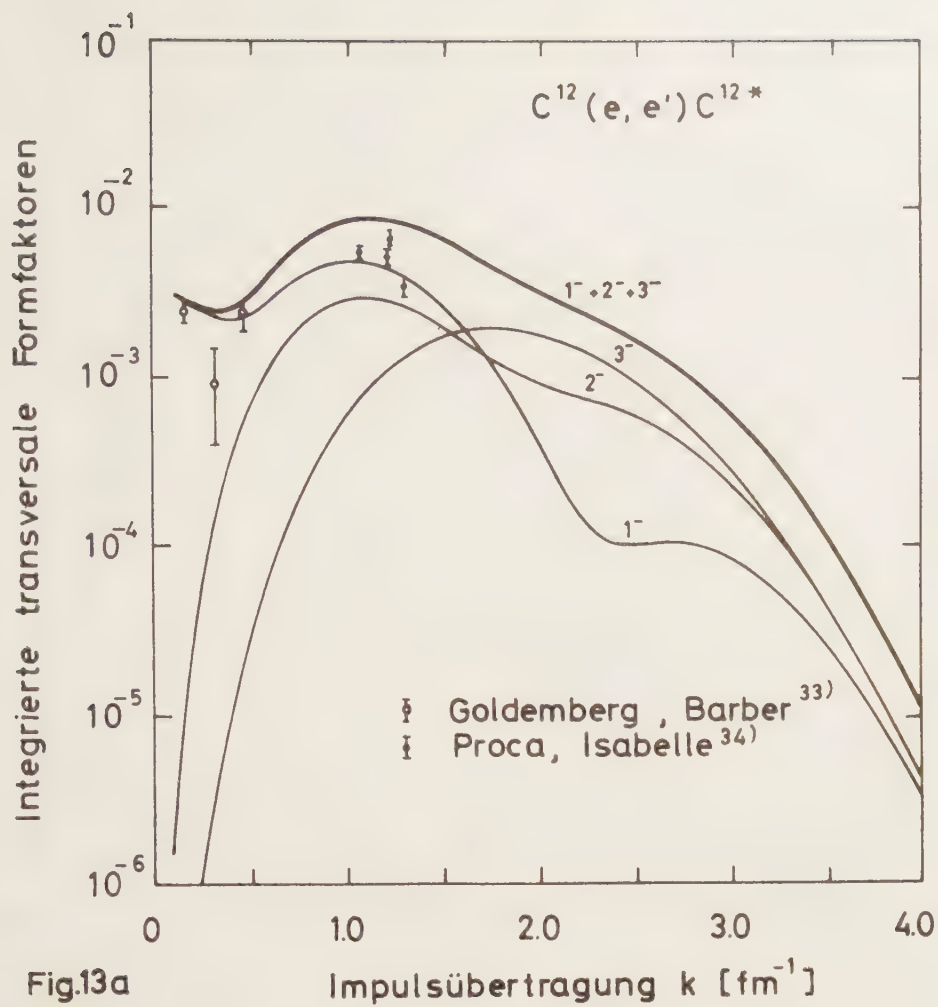


Fig.14 Die Fig.14a, c und e stellen die transversalen und longitudinalen 1^- - 2^- - und 3^- -Formfaktoren in Abhängigkeit von der Anregungsenergie des Targets C^{12} dar bei fester Einschußenergie E_i und festem Streuwinkel Θ des Elektrons.

Die zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitte (Anregungsquerschnitte) sind in den Fig.14b, d und f aufgetragen.

Entsprechendes gilt auch für die Fig.16 und 18.

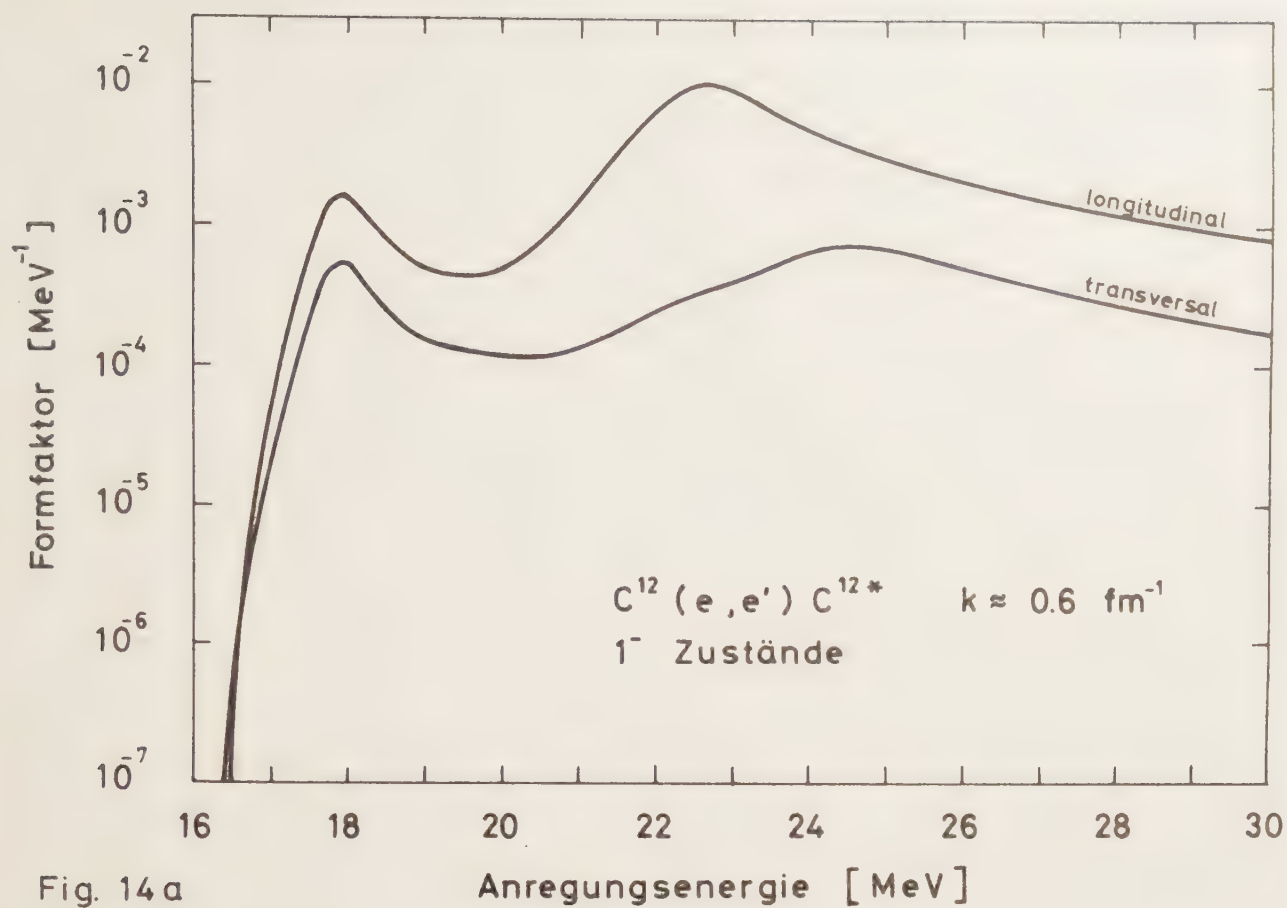


Fig. 14 a

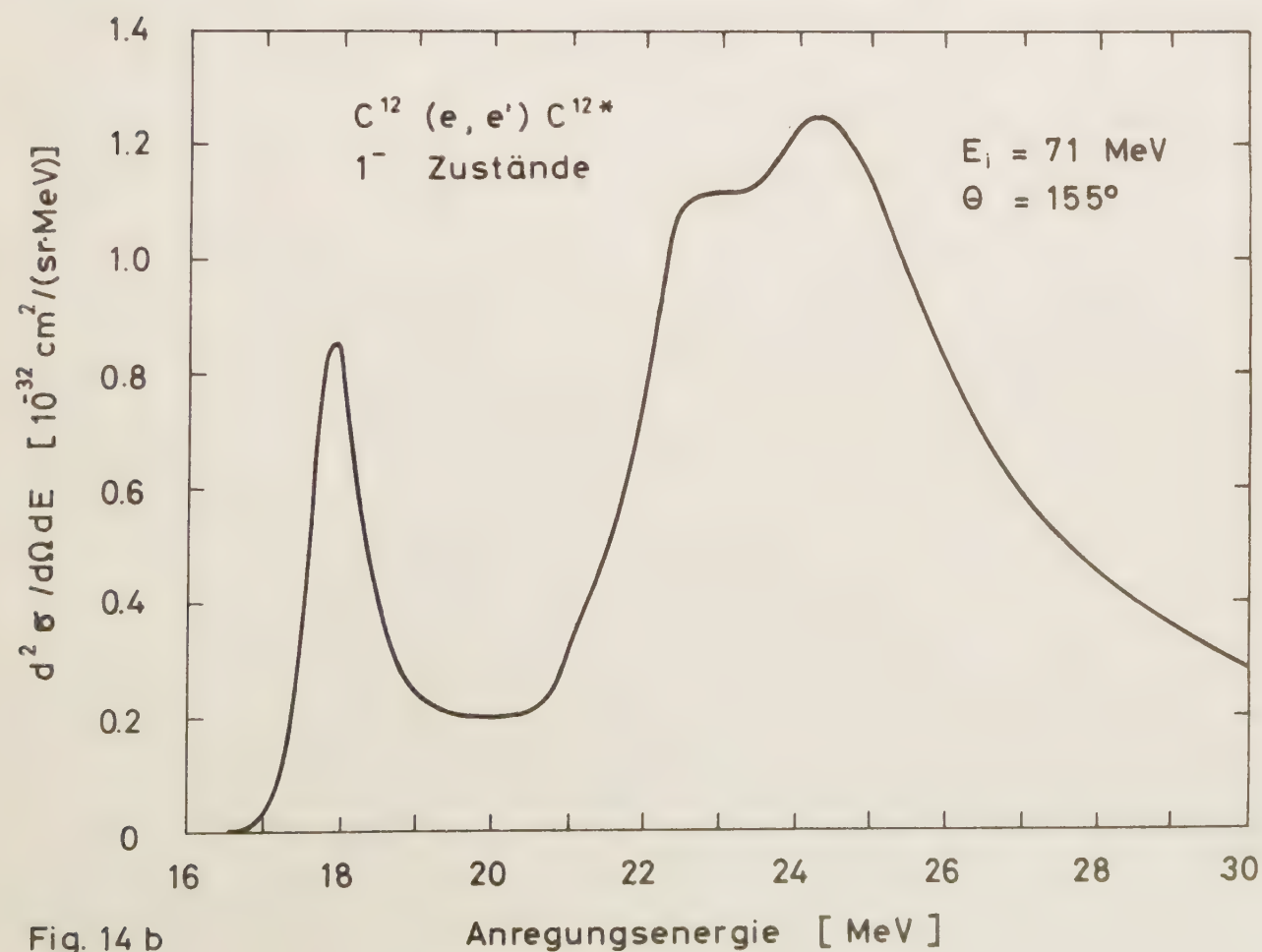


Fig. 14 b

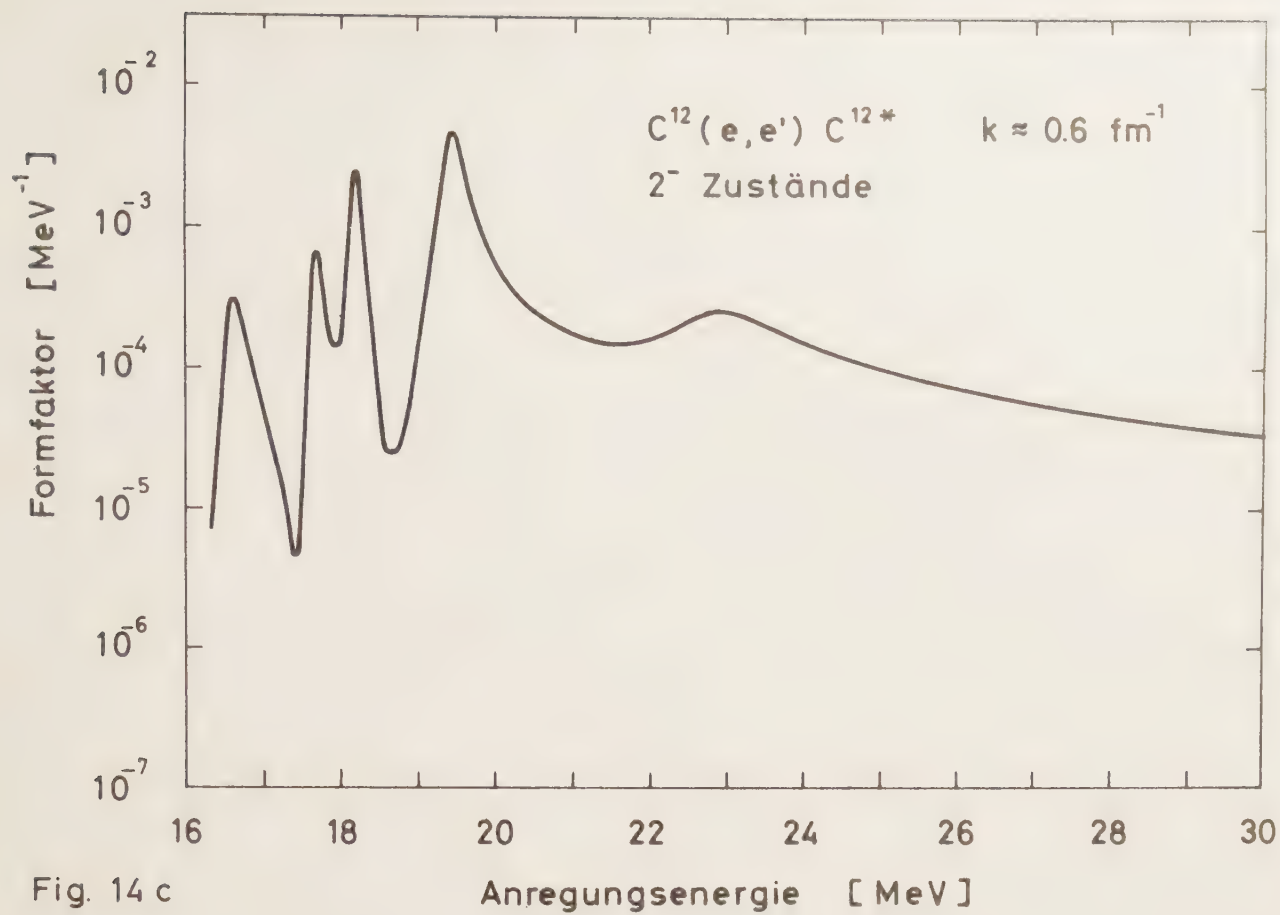


Fig. 14 c

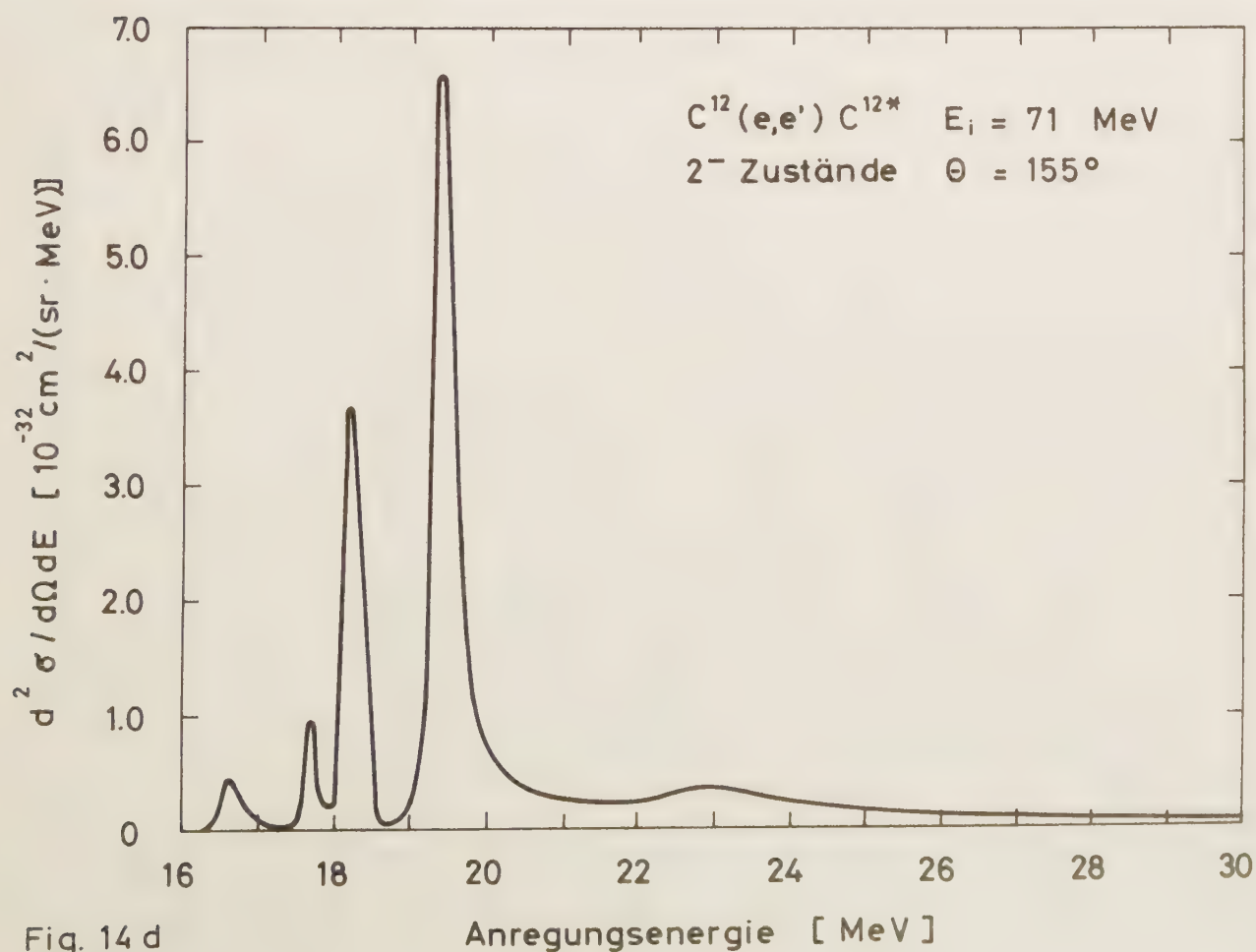


Fig. 14 d

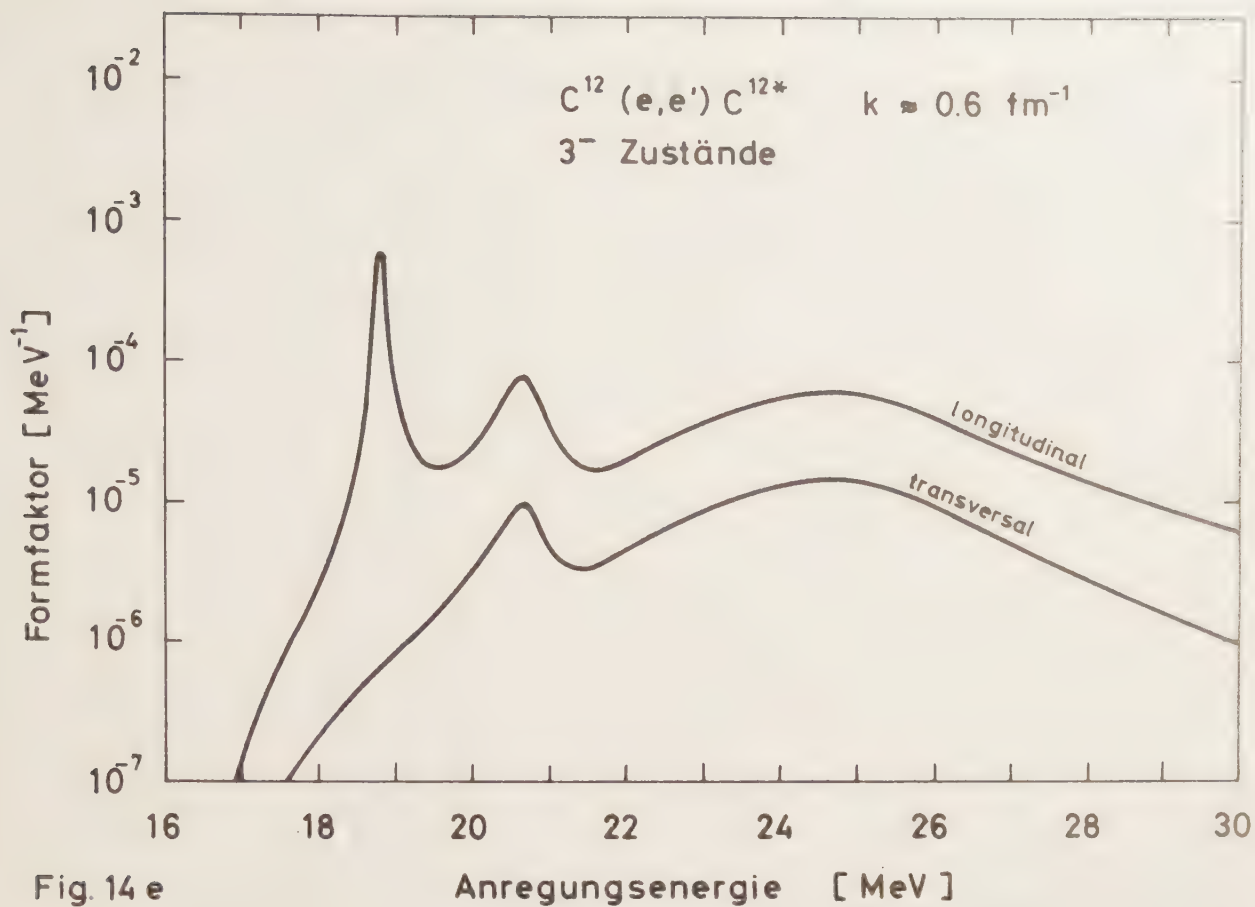


Fig. 14 e

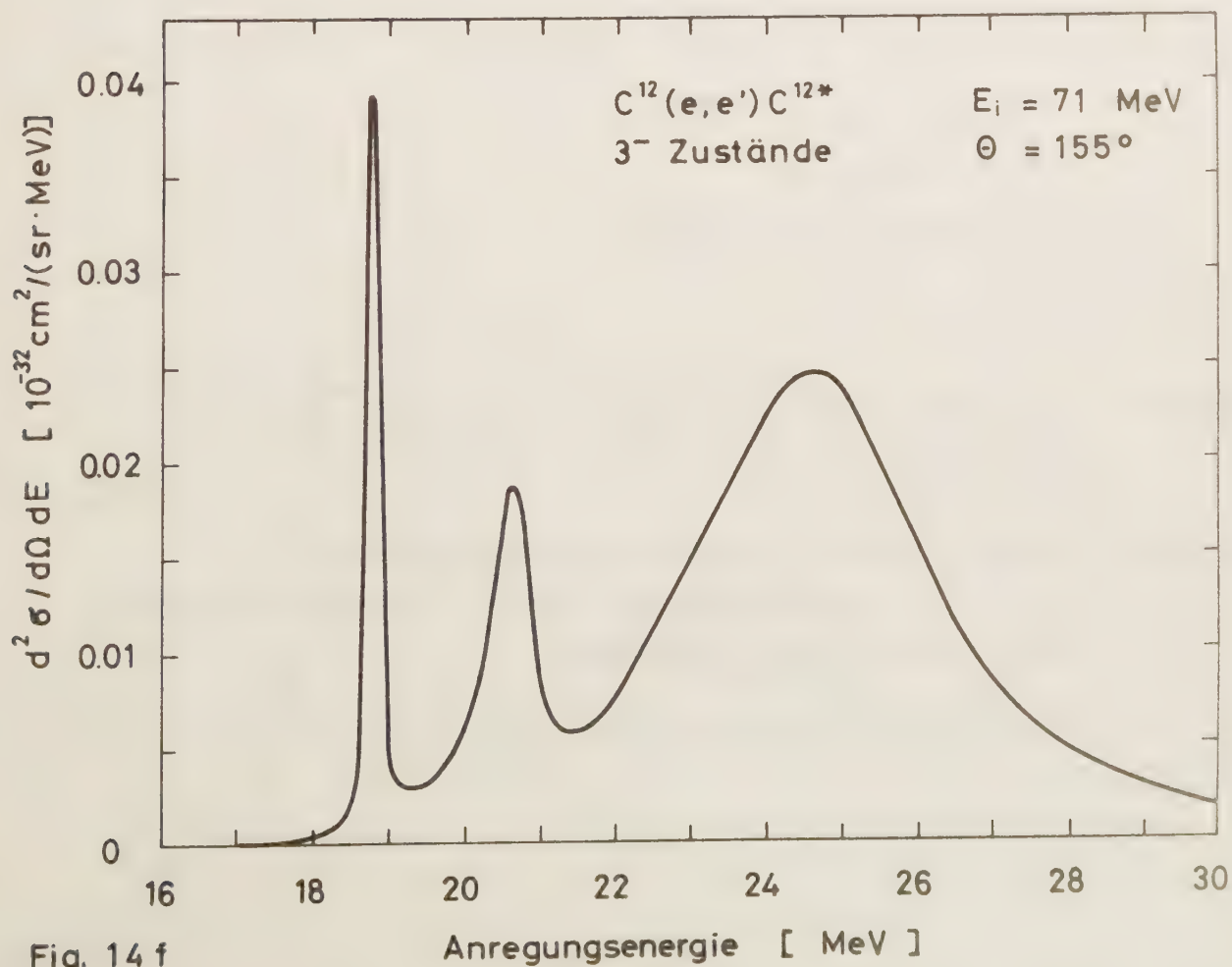


Fig. 14 f

Fig.15a Die Anregungsquerschnitte aus den Fig.14b, d und f für 1^- - 2^- - und 3^- -Zustände sind im gleichen Maßstab aufgetragen.

Fig.15b Darstellung des gesamten Wirkungsquerschnitts ($1^-+2^-+3^-$) in Abhängigkeit von der Anregungsenergie. Vergleich mit dem Experiment.

Entsprechendes gilt auch für die Fig.17 und 19.

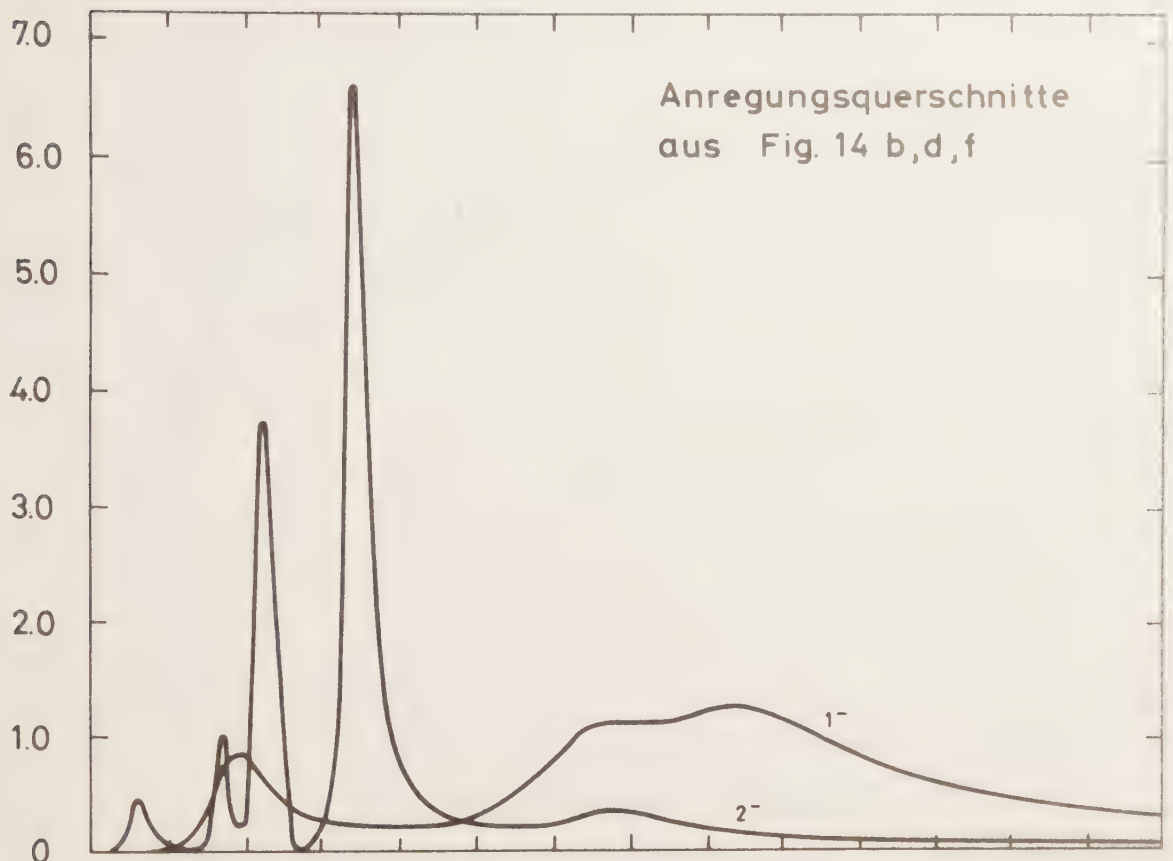


Fig. 15a

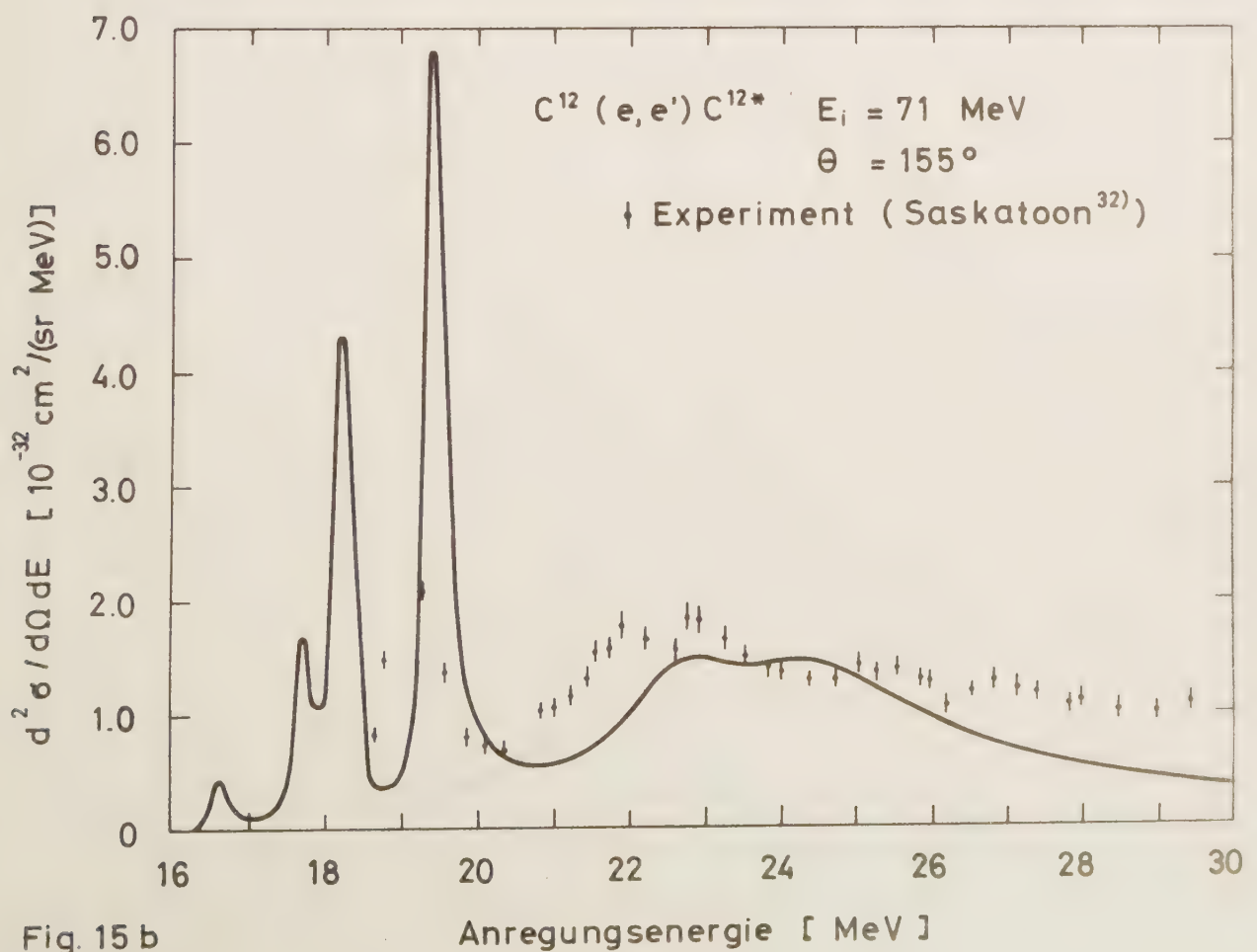


Fig. 15 b

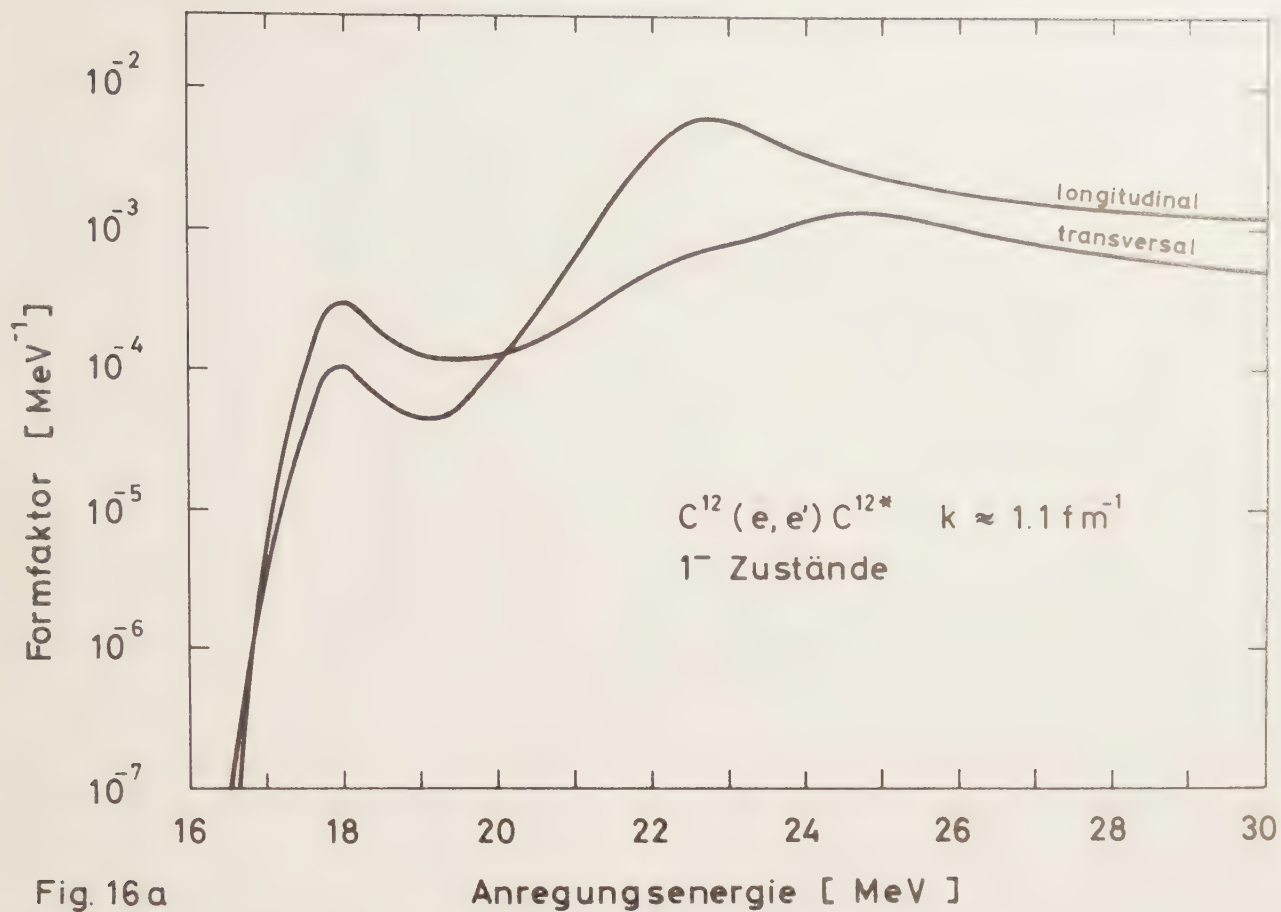


Fig. 16 a

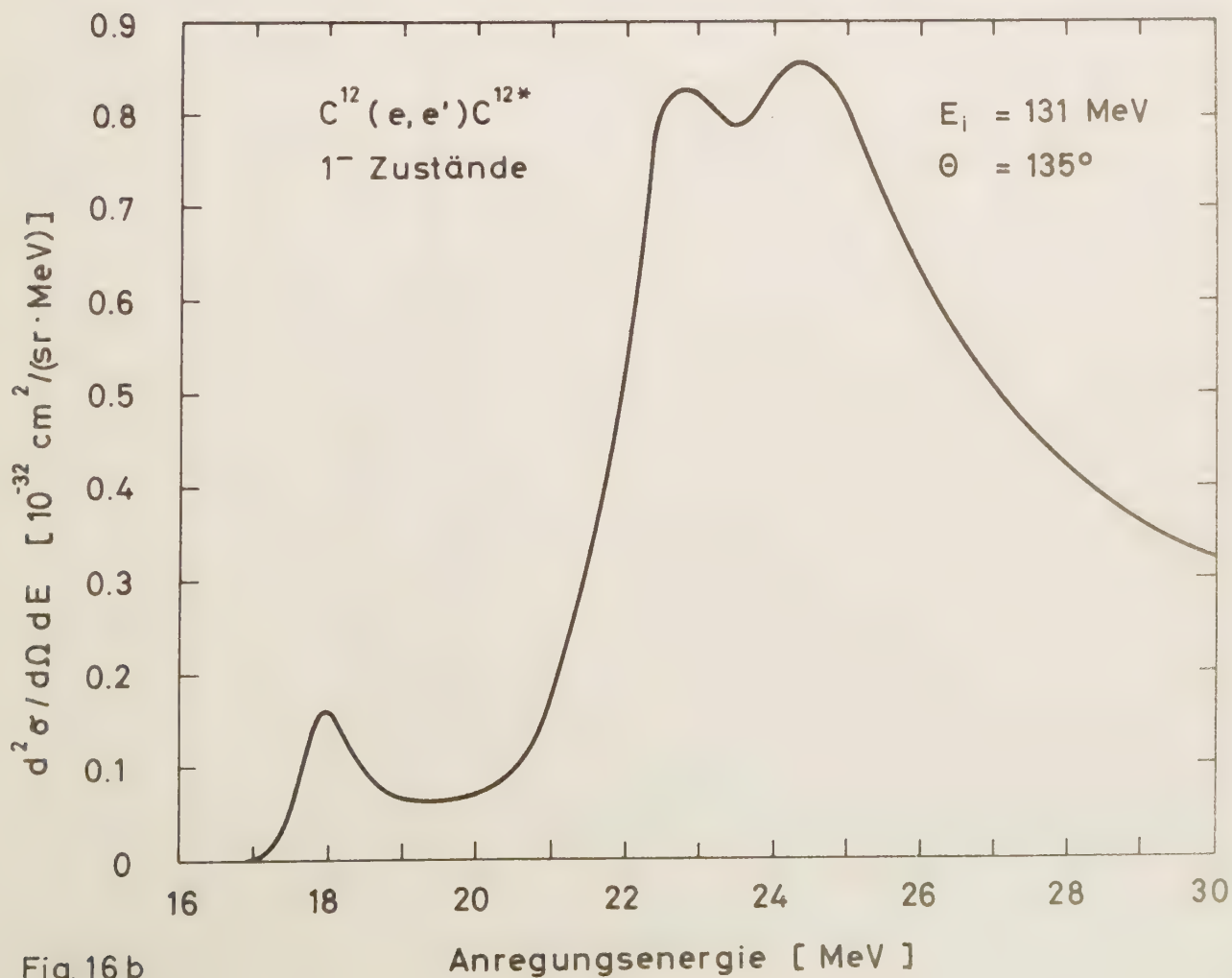


Fig. 16 b

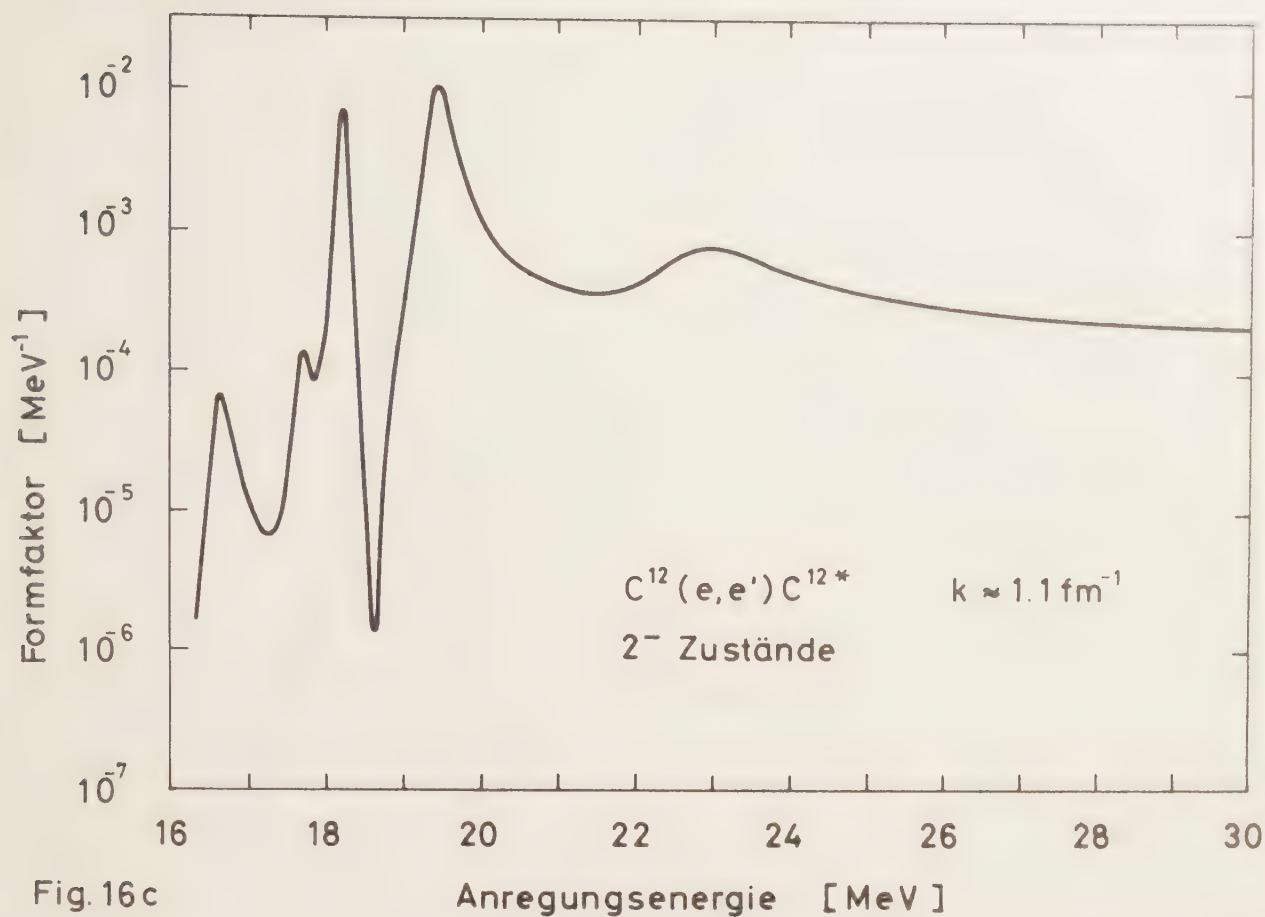


Fig. 16c

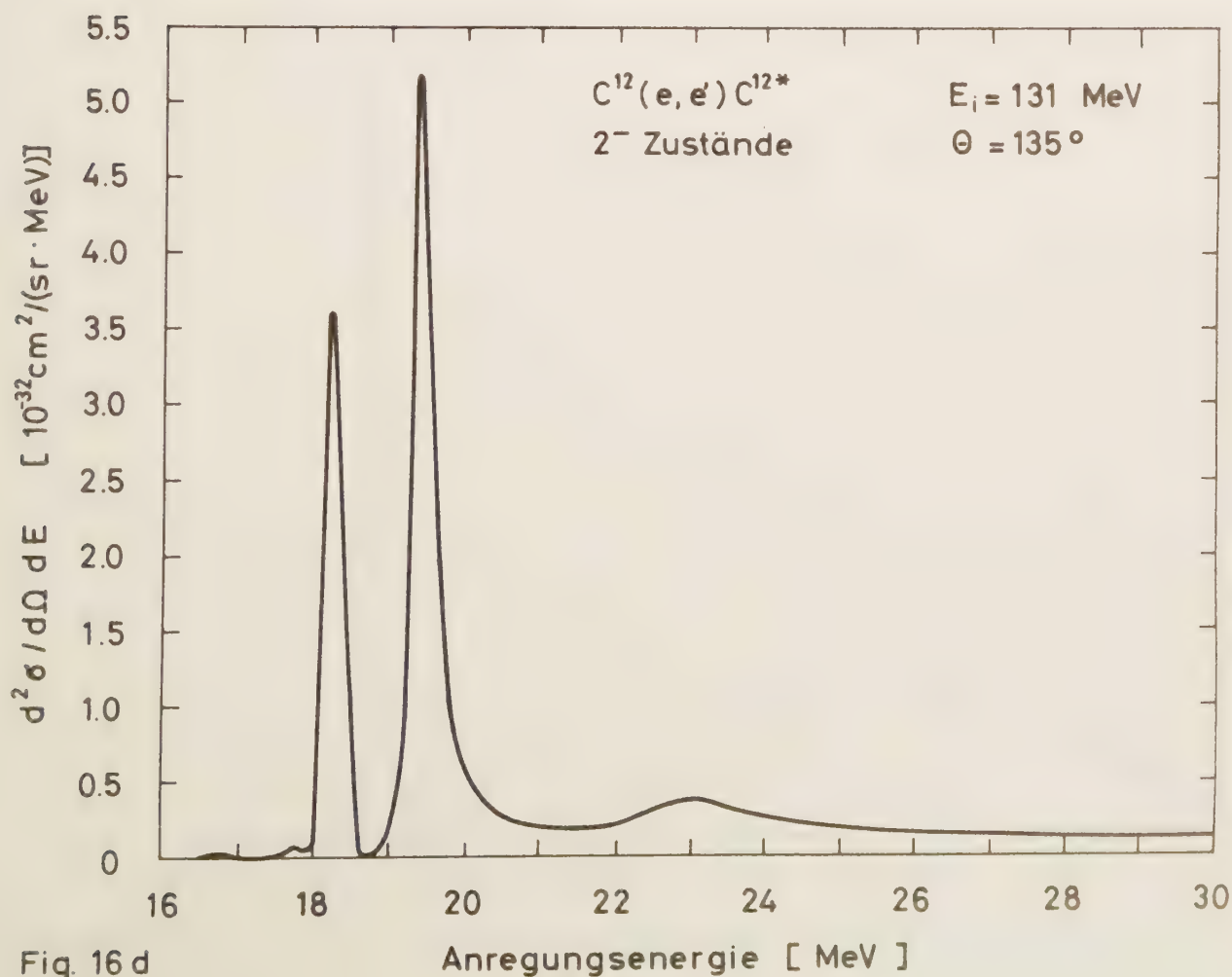


Fig. 16d

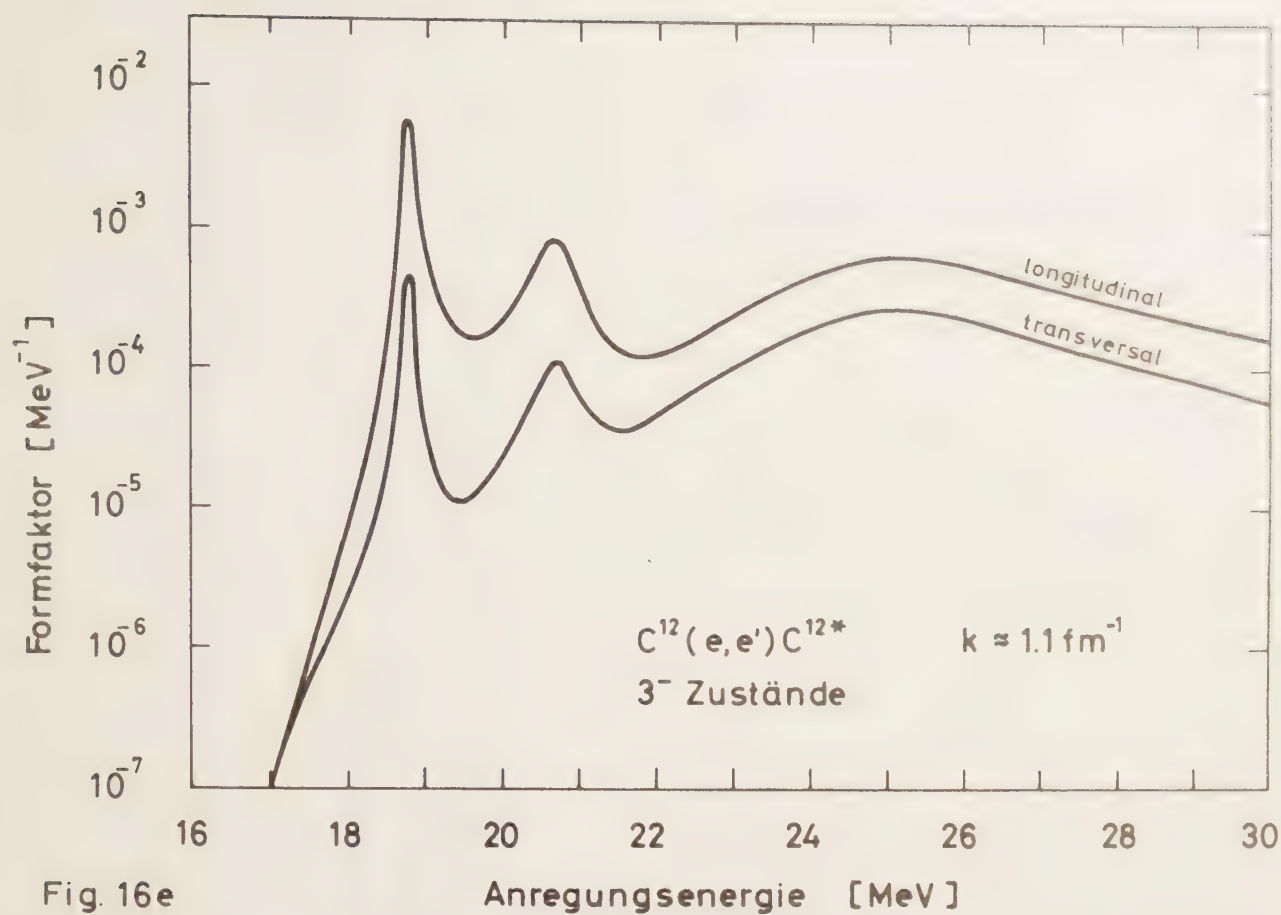


Fig. 16e

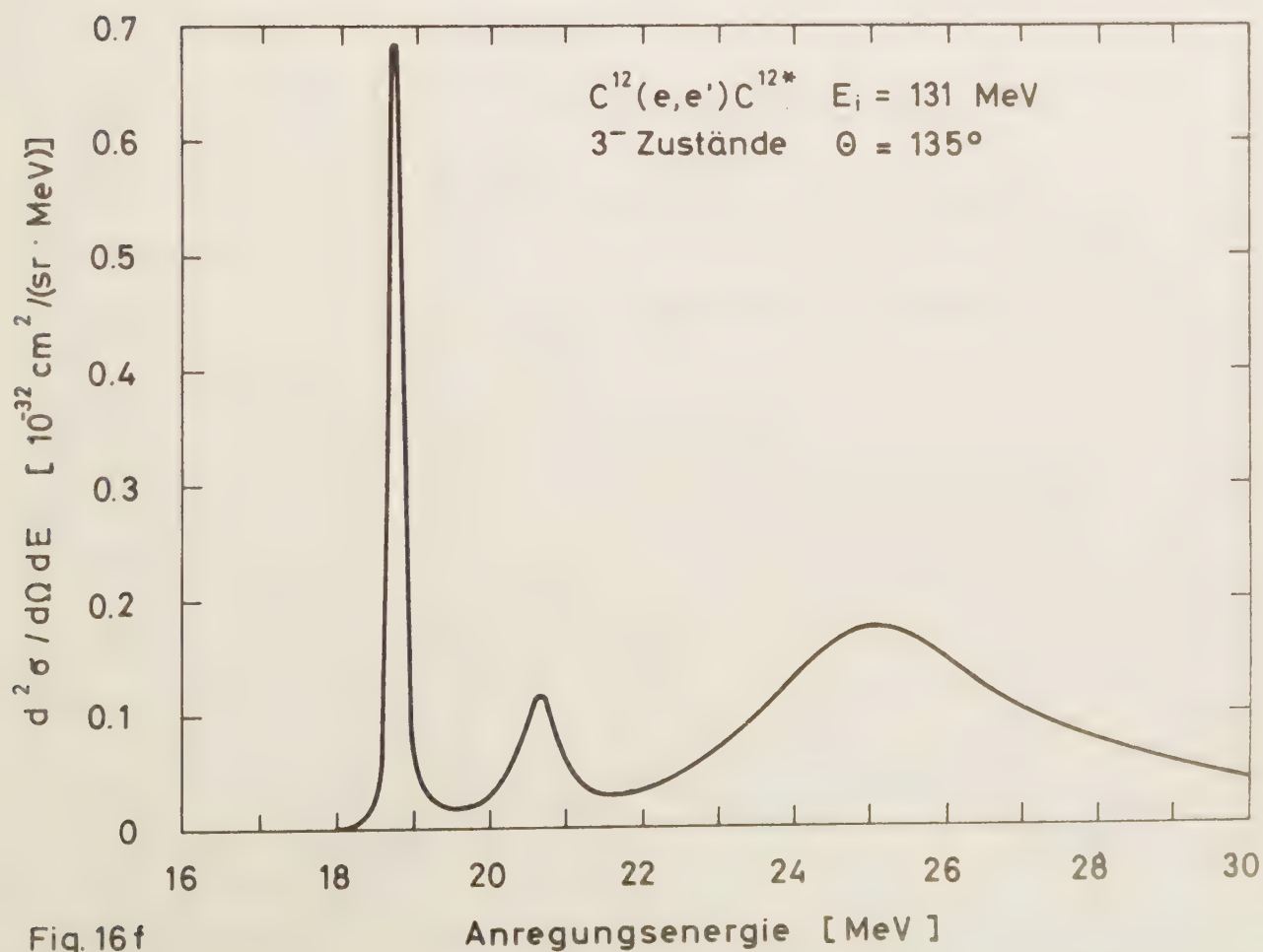


Fig. 16f

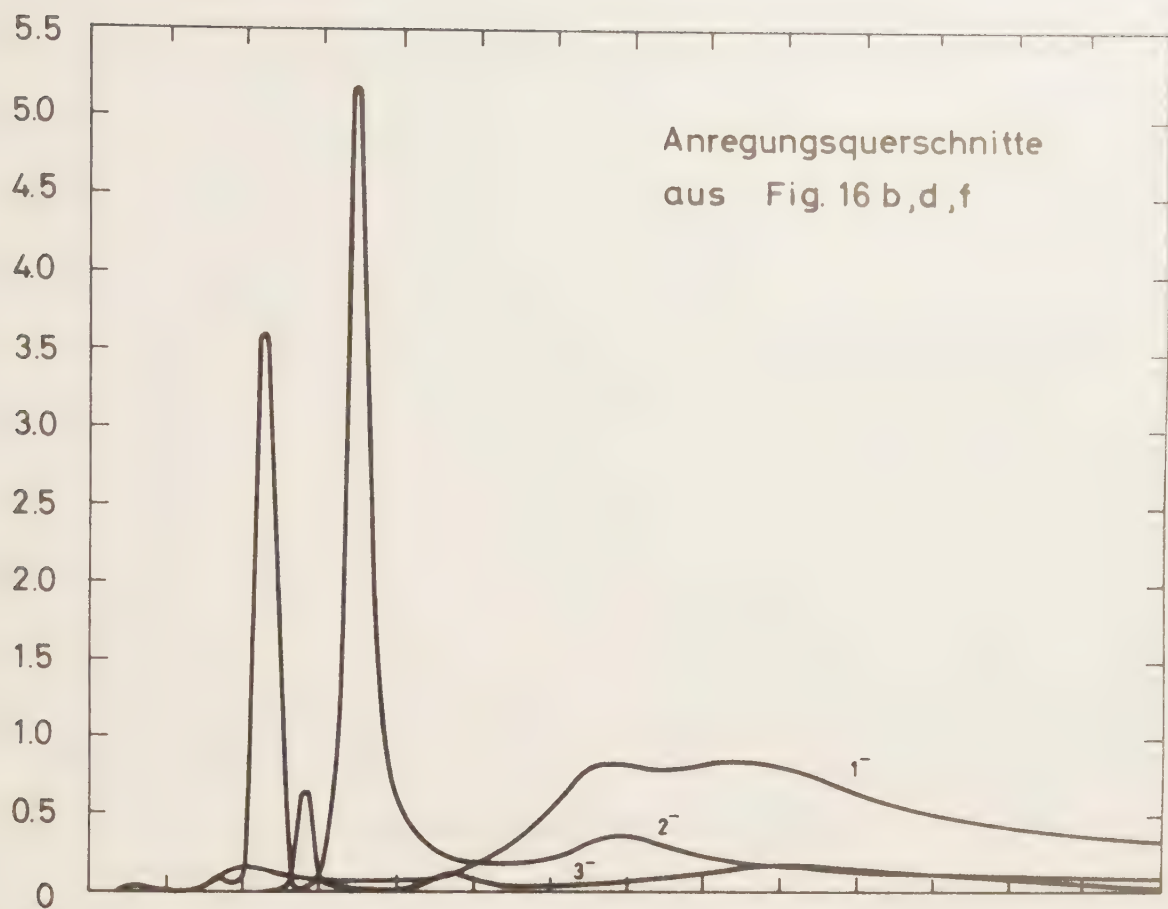


Fig. 17a

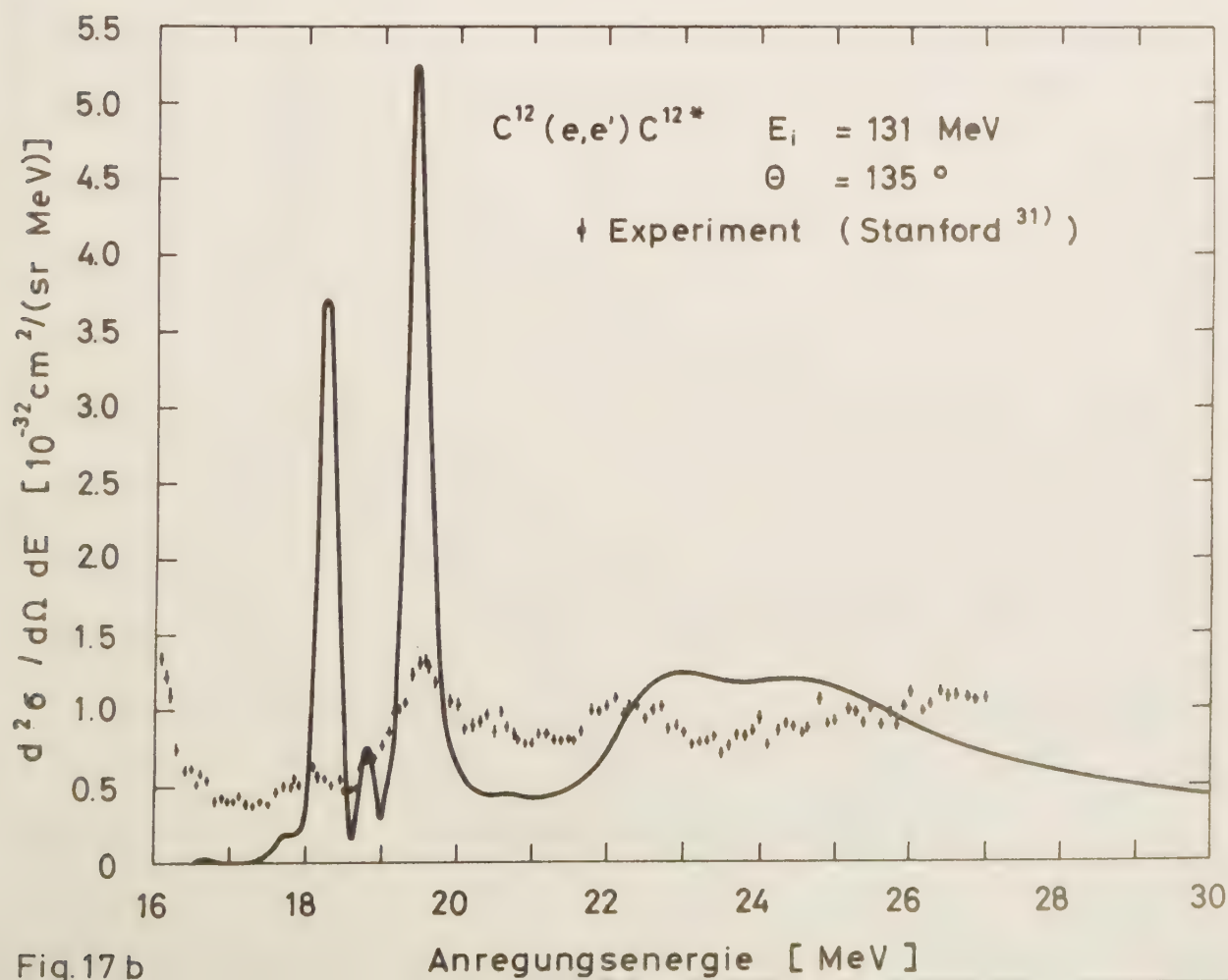


Fig. 17 b

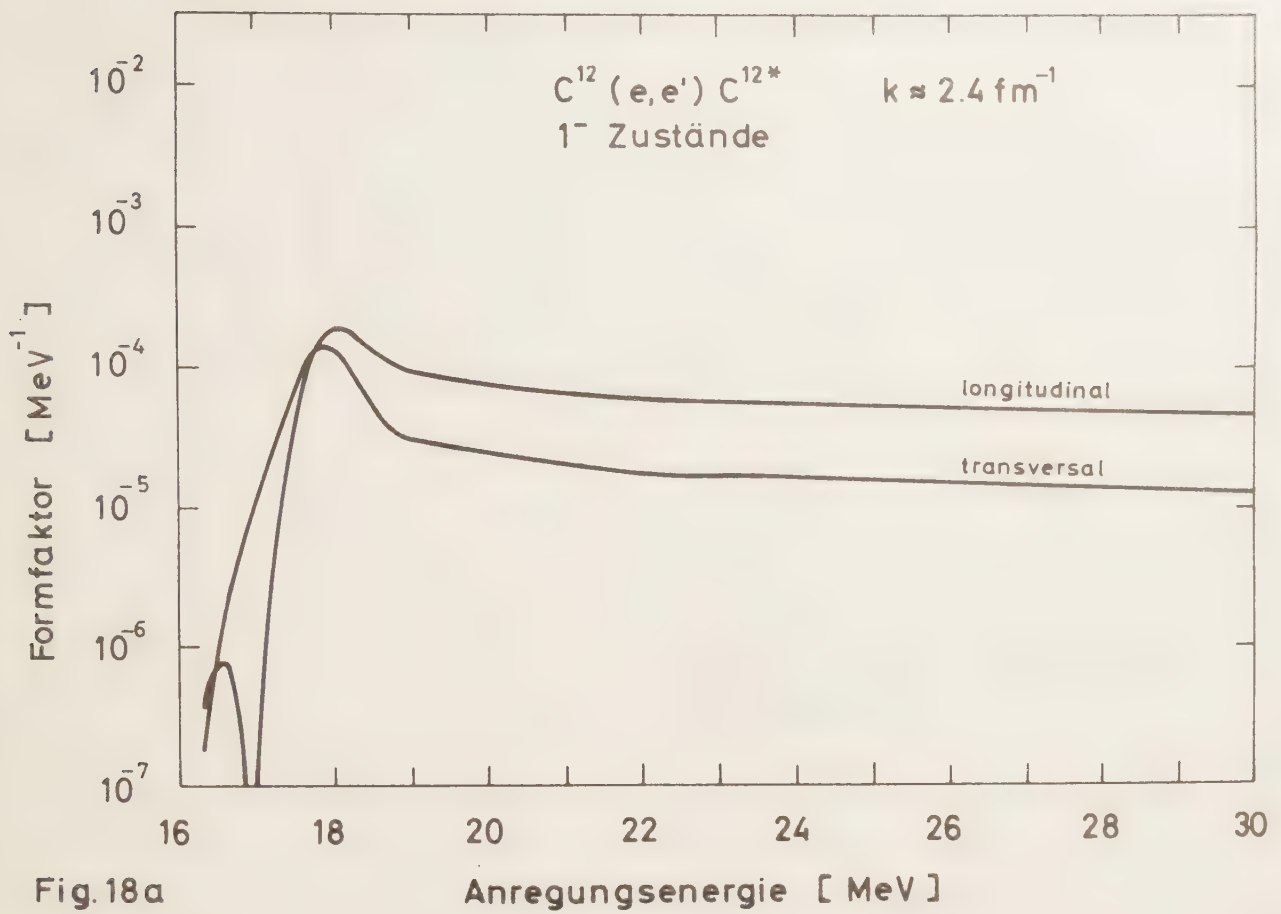


Fig. 18 a

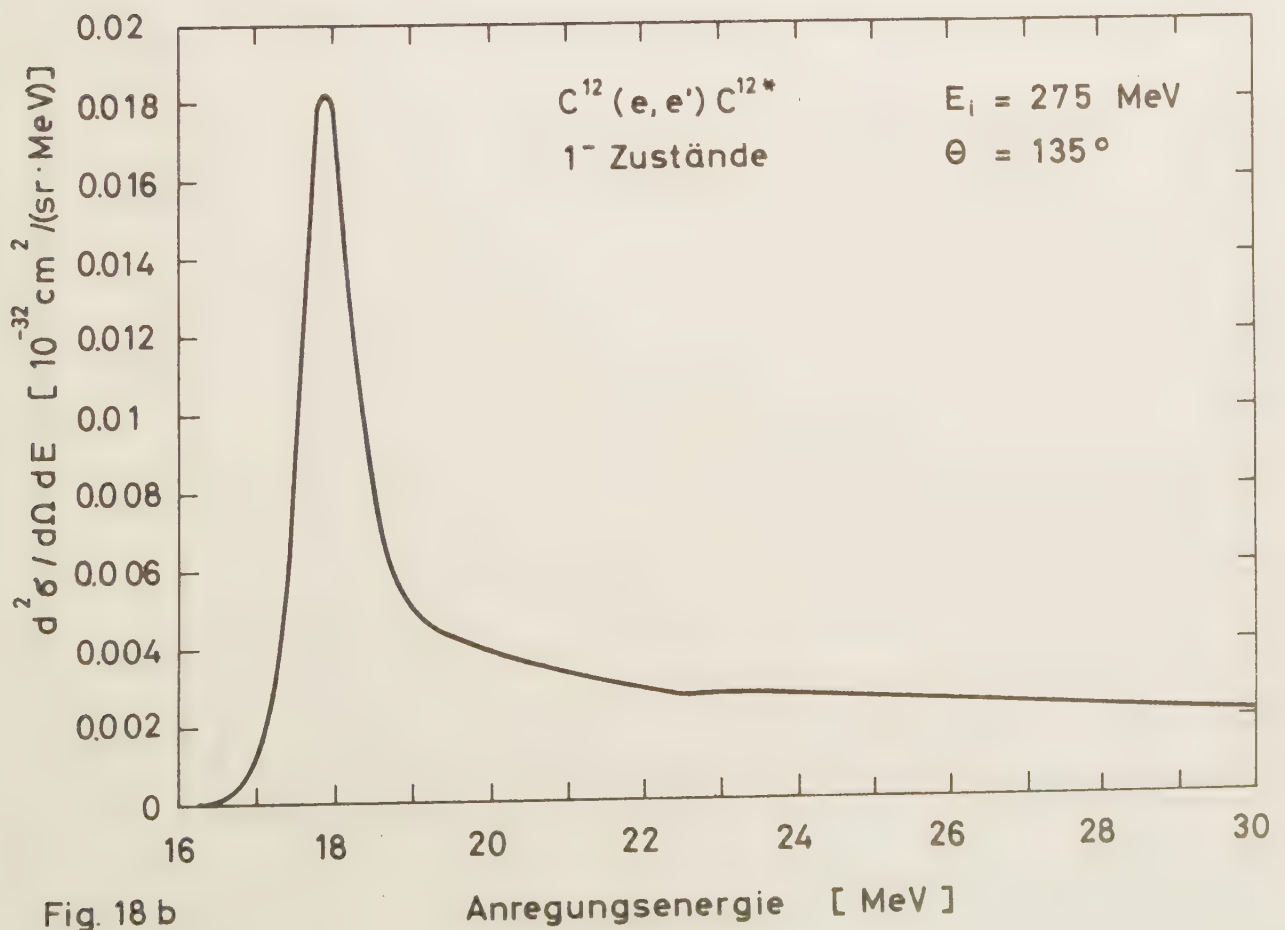


Fig. 18 b

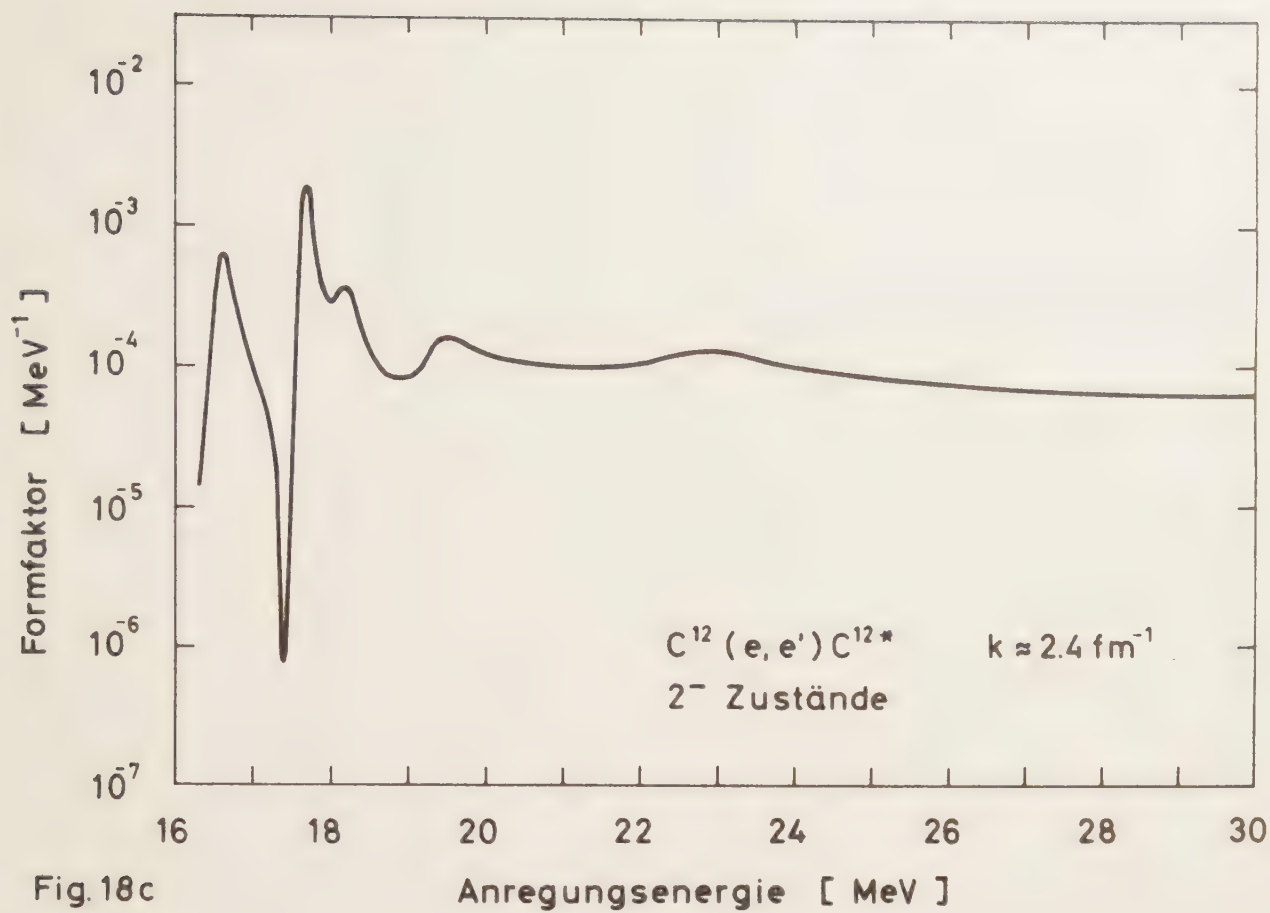


Fig.18c

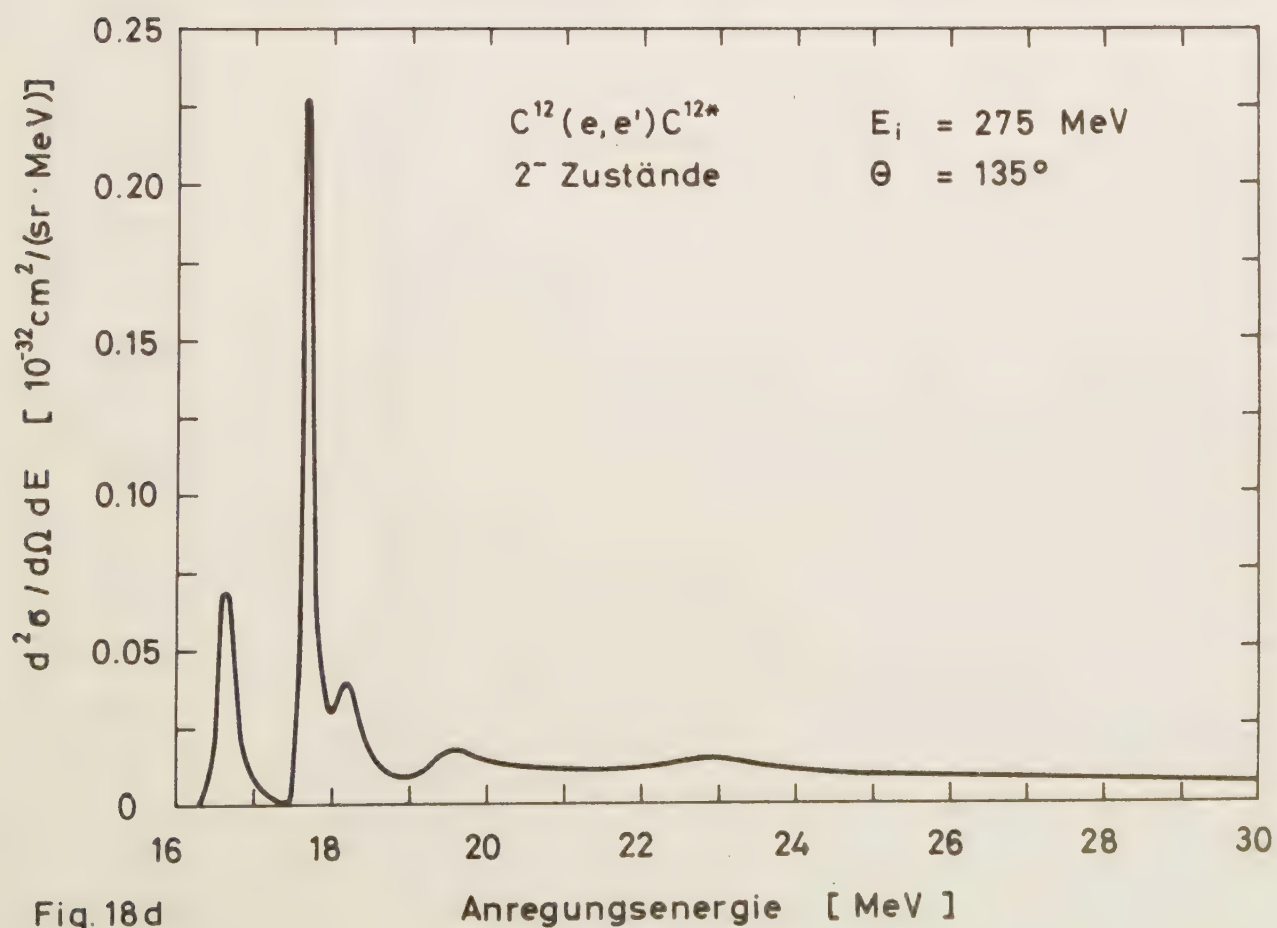


Fig.18d

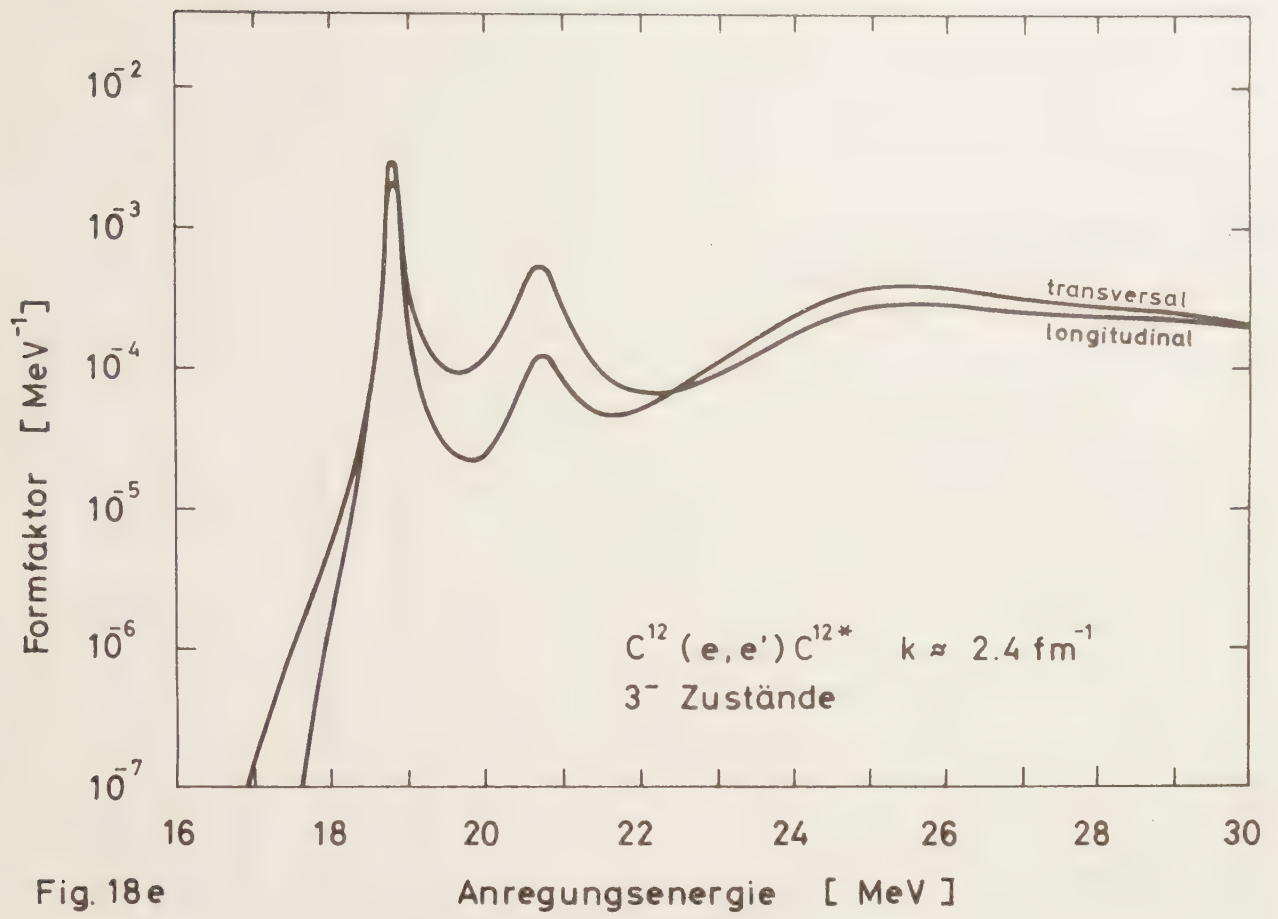


Fig. 18 e

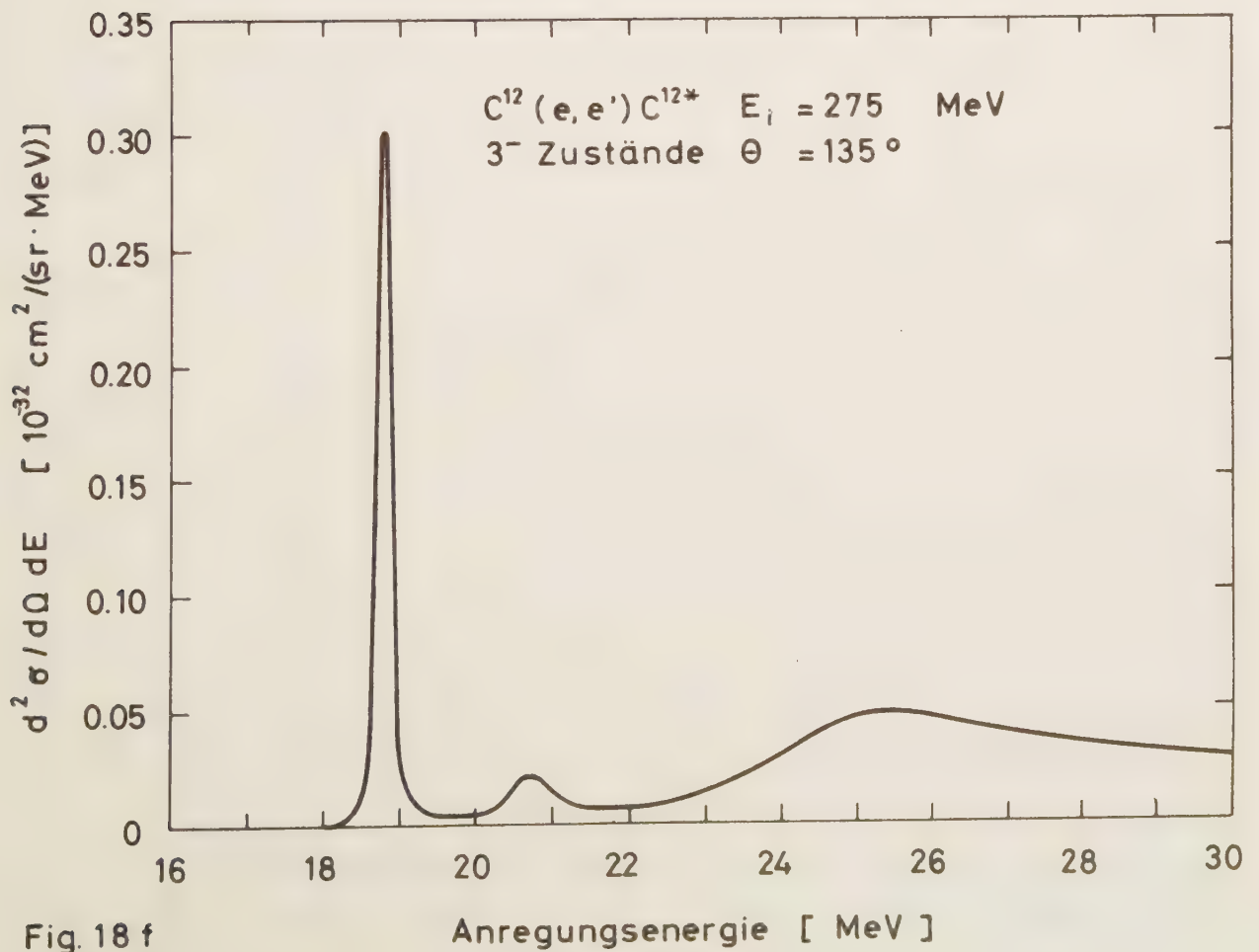


Fig. 18 f

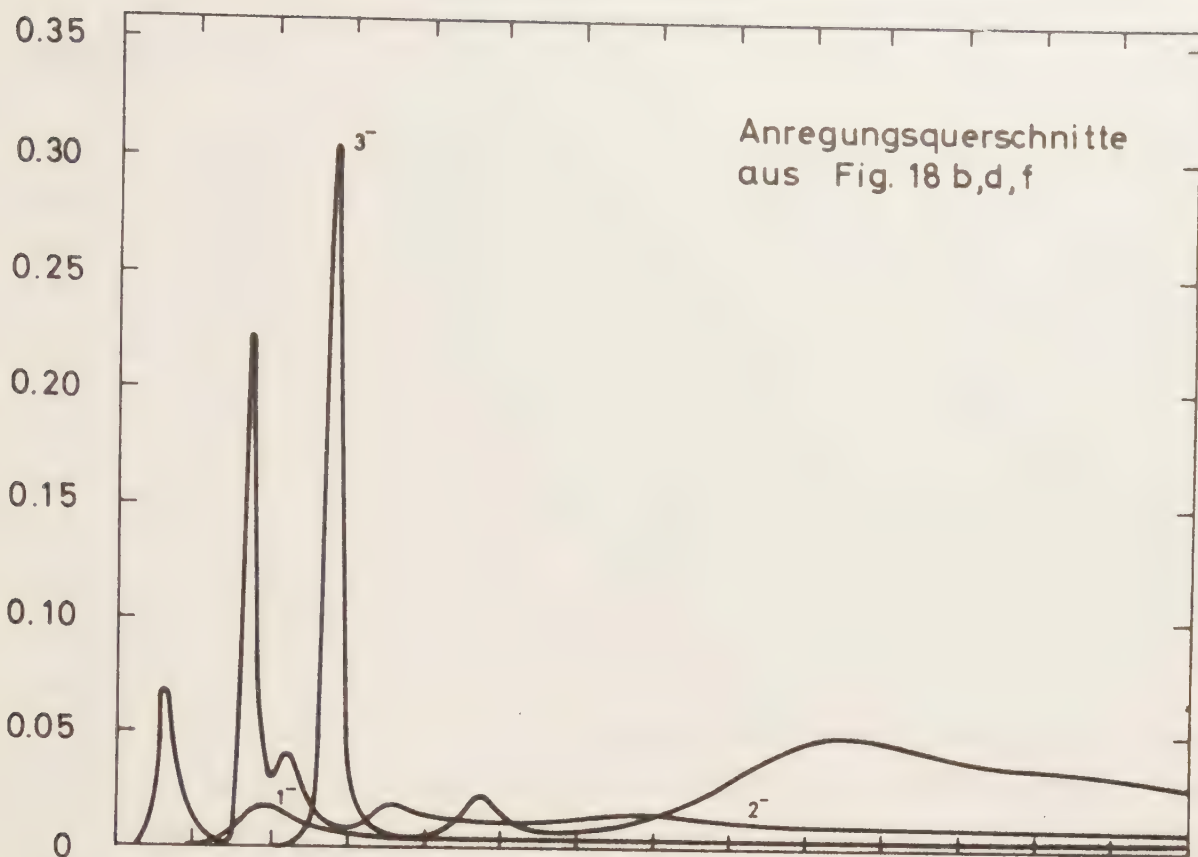


Fig. 19a

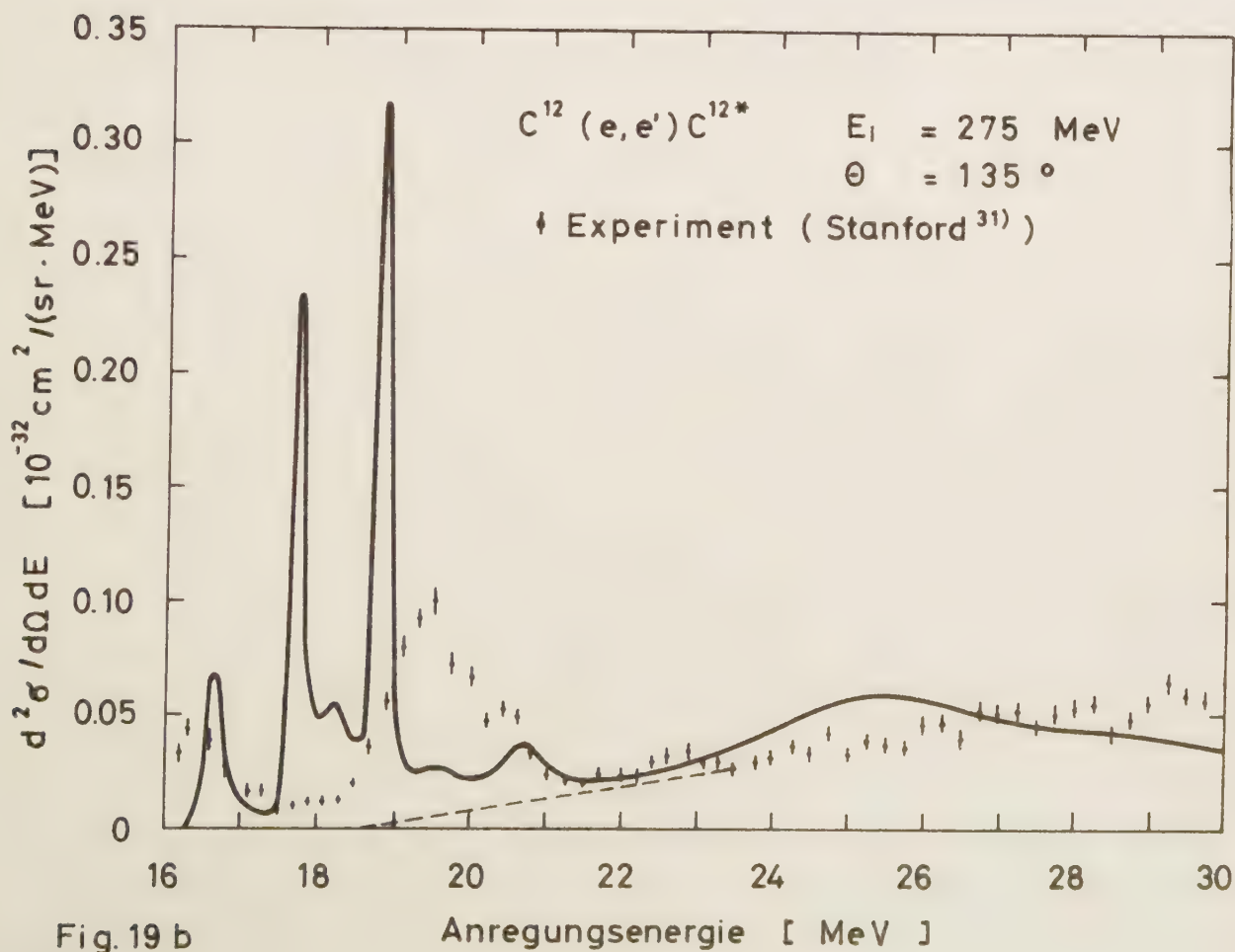


Fig. 19 b

Danksagung

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Greiner, bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit sowie auch ganz besonders für die Förderung und Unterstützung, die er mir bei der Ausführung gewährt hat. Ebenso danke ich Herrn Privatdozent Dr. H.G. Wahsweiler für zahlreiche klärende Diskussionen und Hinweise sowie Überlassung seiner Rechenprogramme zur Eigenkanalmethode. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. P.P. Delsanto, der mir einige seiner numerischen Ergebnisse zur Verfügung gestellt hat. Herrn Privatdozent Dr. D. Drechsel sei für wertvolle Hinweise zur Elektronensteuerung gedankt. Auch allen meinen Kollegen möchte ich für ihre stete Bereitschaft zu klärenden Erörterungen danken.

Die Hilfsbereitschaft und die sachverständige Beratung seitens der Mitarbeiter des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt und des Instituts für Angewandte Mathematik der Kerforschungsanlage Jülich werden dankbar anerkannt.

Frau Boffo danke ich herzlich für die überaus sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen, Frau Knolle für das Tippen der Druckvorlagen und Herrn Brose für die Ausführung der Druckarbeiten.

Lebenslauf

Am 7. Juni 1939 wurde ich als Sohn des Flugzeugführers Herbert Spies und seiner Ehefrau Maria, geborene Ruppel in Frankfurt am Main geboren. Mein Vater ist im Dezember 1939 tödlich verunglückt. Nach Wiederverheiratung meiner Mutter mit dem Ingenieur Moritz Antony wurde ich durch Adoption dessen Sohn.

Vom Herbst 1945 bis Ostern 1950 besuchte ich die Volksschule in Ober-Rosbach, Kreis Friedberg/Hessen und in Frankfurt am Main, danach die Goethe-Schule, ebenfalls in Frankfurt. Im Anschluß an das Abitur im Frühjahr 1959 studierte ich Physik an der Universität Frankfurt. Nach dem Vordiplom fertigte ich dort bei Prof. Dänzer eine Diplomarbeit aus dem Bereich der Ionenoptik an. Die Diplomprüfung legte ich im Mai 1966 ab. Seit September 1966 bin ich am Institut für Theoretische Physik bei Prof. Greiner tätig.

Zu meinen akademischen Lehrern in Physik und Mathematik gehörten die Professoren und Dozenten:

R. Baer, F. Beck, M. Czerny, H. Dänzer, W. Greiner, G. Köthe, R. Moufang, B. Mrowka, U. Steinwedel, G. Süßmann, H.G. Wahsweiler.

